Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13
08.02.2013
Blatt 15

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Seien $a, b > 0$ und K gegeben durch
$$K := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1 \right\}.$$
Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

2. (4 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix ($n \in \mathbb{N}$) und $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form $q(x) = \langle x, Ax \rangle$. Zeigen Sie:
   a) $\mathrm{grad}(q)(x) = 2Ax$.
   b) Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum von q unter der Nebenbedingung $|x| = 1$ mit Lagrange-Parameter λ, so ist λ ein Eigenwert von A und x_0 ein zugehöriger Eigenvektor. Es ist dann auch $q(x_0) = \lambda$.

3. (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und ϕ ein dynamisches System auf G mit zugehörigem Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^n$.
   a) Man nennt $y \in G$ eine Gleichgewichtslage von ϕ, wenn gilt: $y(t) = y$ für alle $t \in I(y)$. Zeigen Sie: y ist genau dann Gleichgewichtslage von ϕ, wenn y Nullstelle von f ist, $f(y) = 0$.
   b) Sei $x \in G$ mit $t_+(x) = \infty$ und es sei $y = \lim\limits_{t \to 0} x(t)$. Zeigen Sie, dass y Gleichgewichtslage sein muss.

4. (4 Punkte) Sei $k > 0$ und $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass
$$x(t) = x\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega}\sin(\omega t),$$
$t \in \mathbb{R}$, die Lösungskurve von $m\ddot{x} = kx$ zum Anfangswert $(x, \dot{x})$ ist, wobei $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ($m > 0$) ist.

Abgabe: Freiwillig nächstes Semester