Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
30.11.2012
Blatt 7

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein unitärer-VR und $\dim V < \infty$. Sei $f : V \to V$ linear und erfülle $\langle v, f(v) \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

   a) Zeige Sie, dass gilt:
   $$f^* = f.$$
   (Hinweis: Setze $v = x + \lambda y$ mit $\lambda = 1$ und $\lambda = \mathrm{i}$ und untersuche damit $\langle v, f(v) \rangle$.)

   b) Zeigen Sie, dass gilt:
   $$\langle v, f(v) \rangle > 0 \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } f \text{ sind größer als Null.}$$

2. (4 Punkte)

   a) Eine Teilmenge Y eines metrischen Raumes X heißt dicht, wenn $\overline{Y} = X$ gilt. Zeigen Sie: Y ist genau dann dicht, wenn für jede nicht-leere offene Menge $U \subset X$ gilt, dass $U \cap Y \neq \emptyset$ ist.

   b) Sei nun X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $f^{-1}(X \setminus A) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(A)$, wobei $f^{-1}(A)$ das Urbild der Menge A ist und verwende, dass das Urbild offener Mengen offen ist für stetige Funktionen).

3. (4 Punkte) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem (reellen) Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass für alle $x \in V$ gilt:
   $$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1 .$$
   Zeigen Sie:

   a) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum V und sind d_1 bzw. d_2 die von $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ induzierten Metriken auf V, so ist eine Teilmenge $U \subset V$ genau dann bzgl. d_1 offen, wenn sie es bzgl. d_2 ist.

   b) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum V, so ist $(V, \|\cdot\|_1)$ genau dann ein Banachraum, wenn $(V, \|\cdot\|_2)$ es ist.

4. (4 Punkte)

   a) Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to B_1$, $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\}$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, so dass f^{-1} existiert und sowohl f als auch f stetig sind. (Hinweis: $\frac{x}{1 \pm \|x\|}$).

b) Sei X ein metrischer Raum und $g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Seien Mengen U_c und V_c definiert durch

$$U_c := \{x \in X;\ g(x) < c\}\,, \quad V_c := \{x \in X;\ g(x) = c\}\,.$$

Beweisen Sie, dass U_c offen und V_c abgeschlossen ist für alle $c \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Freitag, 07.12.2012, 11 Uhr in der Vorlesung