Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13
21.12.2012
Blatt 10

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $x \in G$ und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ in x in x Richtung $\boldsymbol{v}$ partiell differenzierbar ist, wenn der Grenzwert
$$D_{\boldsymbol{v}} f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \boldsymbol{v}t) - f(x)}{t}$$
existiert. Zeigen Sie, ist f total differenzierbar, so ist f in x in alle Richtungen v differenzierbar und es gilt: $D_{\boldsymbol{v}} f(x) = Df(x)\boldsymbol{v}$.

2. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls x} > 0 \text{ und } y = x^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ in alle Richtungen $\boldsymbol{v}$ partiell differenzierbar ist mit $D_{\boldsymbol{v}} f\,(x_0, y_0) = 0$, aber f in (x_0, y_0) nicht stetig ist.

3 (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn sie der folgenden Potentialgleichung genügt:
$$\Delta f = 0$$
Zeigen Sie: Für $n \neq 2$ ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^{-n+2}$ und für $n = 2$ ist $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(\|x\|)$ harmonisch.

4. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt lokal gleichmäßig stetig falls für jede kompakte zusammenhängende Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Einschränkung $g|_K : K \to \mathbb{R}$ von g auf K, d.h. $g|_K(x) = g(x)$, gleichmäßig stetig ist. Zeigen Sie: f ist lokal gleichmäßig stetig.

Abgabe: Freitag, 11.01.2013, 11 Uhr in der Vorlesung