Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13
16.11.2012
Blatt 5

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer VR mit $\dim V < \infty$.
   a) Sei U ein UVR von V und
   $$U^\perp := \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0,\ \forall u \in U\}.$$
   Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein UVR von V ist und dass gilt
   $$V = U \oplus U^\perp.$$
   b) Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$ und $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
2. Die Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, sei positiv definit und symmetrisch, d.h. $A^t = A$. Zeigen Sie,
   $$a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2 > 0,\ \text{falls } 1 \leq i < k \leq n.$$
   (Hinweis: Betrachte x^tAx mit $x = \lambda e_i + e_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$).
3. (4 Punkte) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f \text{ stetig}\}$. Sei außerdem $\epsilon_\lambda(t) := e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, und $U := \langle(\epsilon_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\rangle$. Zeigen Sie, dass U ein UVR von $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ist, mit
   $$< x, y >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{x(t)}y(t)\mathrm{d}t, \quad x, y \in U,$$
   zu einem unitären Raum wird und $(\epsilon_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ überabzählbare ONB von $(U, < \cdot, \cdot >)$ ist.
4. (4 Punkte) Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ wird genau dann als Norm bezeichnet falls:
   - $||v|| \geq 0$, $\forall v \in V$, und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,
   - $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ und $\forall v \in V$,
   - $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

   Sei $V = \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie,
   a) $\|\cdot\|_{\max} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+$, $\|v\|_{\max} := \max\limits_{1\leq i\leq n} |v_i|$, ist eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.
   b) Zeigen Sie, dass beschränkte Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\max})$, d.h. $\exists c > 0$ mit $\|v_n\|_{\max} \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, konvergente Teilfolgen $(v_{n(l)})_{l\in\mathbb{N}} \subset (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen, d.h. $\exists v \in \mathbb{K}^n$:
   $$\left\|v_{n(l)} - v\right\|_{\max} \to 0,\ l \to \infty.$$
   c) Zeigen Sie: Es existiert ein $c_1 > 0$ mit $\|v\| \leq c_1 \|v\|_{\max}$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$.

d) Zeigen Sie: Es existiert ein $c_2 > 0$ mit $\|v\|_{\max} \leq c_2 \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$.

(Hinweis zu d): Setze $d := \inf\{\|v\|\,;\ v \in W\}$, $W := \{v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|_{\max} = 1\}$ und beweisen Sie $d\,\|v\|_{\max} \leq \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie dann $d > 0$, indem Sie eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ konstruieren, siehe Aufgabe b), für die gilt $v_n \to v$ sowohl in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\max})$ als auch in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie dann, $\|v_n\|_{\max} \to \|v\|_{\max} = 1$ und $\|v_n\| \to \|v\| = d$ und schließen Sie $d \neq 0$.)

Abgabe: Freitag, 23.11.2012, 11 Uhr in der Vorlesung