Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

WS 2012/13
23.11.2012
Blatt 6

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte)
   a) Sei $V = \mathbb{R}[T]^{(2)} = \{p \in \mathbb{R}[T];\ \deg(p) \leq 2\}$ und $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$,
   $$< p, q >:= \int_0^1 p(x)p(x)\mathrm{d}x.$$
   Orthonormalisieren Sie die Standardbasis $\mathfrak{a} := (1, T, T^2)$ von V nach E. Schmidt, d.h. führen sie die Rekursion ($v_l \in \mathfrak{a}$, $\forall l$)
   $$e_1 := v_1, \quad \widetilde{e}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{l=1}^{k} < e_l, v_{k+1} > e_l, \quad e_{k+1} := \frac{\widetilde{e}_{k+1}}{\|\widetilde{e}_{k+1}\|} \tag{1}$$
   durch.

   b) Sei nun $(V, < \cdot, \cdot >)$ der euklidische VR bestehend aus $V := \{(c_l)_{l \in \mathbb{N}};\ c_l \in \mathbb{R},\ c_l \neq 0$ nur für endlich viele $l \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{R}$-VR der abbrechenden Folgen in $\mathbb{R}$) mit
   $$(c + b)_l := c_l + b_l\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad (\lambda c)_l := \lambda c_l\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad b, c \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
   und dem Skalarprodukt
   $$< c, b >:= \sum_{n=1}^{\infty} c_l b_l,\ c, b \in V.$$
   Orthonormalisieren Sie das ∞-Tupel $\mathfrak{b} := (v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots)$ mit
   $$(v_k)_l := \begin{cases} 1, & l \leq k \\ 0, & l > k \end{cases}$$
   ($v_k \in V\ \forall k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{b}$ Basis von V) nach E. Schmidt, d.h. führen Sie die Rekursion (1) durch und bestimmen Sie e_k für alle $k \in \mathbb{N}$.

2. (4 Punkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzt man
   $$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n);\ \det A = 1\}\,,\ \mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n);\ \det A = 1\}$$
   die spezielle orthogonale Gruppe bzw. spezielle unitäre Gruppe (zum Index n). Zeigen, Sie:

   a) Für jedes $A \in \mathrm{SO}(2)$ gibt es ein $\phi \in \mathbb{R}$, so dass $A = S(\phi)$.

   b) Für jedes $A \in \mathrm{SU}(2)$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}^2$ mit $\|z\| = 1$, so dass $A = S(z)$.

3. (4 Punkte) Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass V eine ON-Basis bestehend aus Eigenvektoren für f besitzt.

4. (4 Punkte) Sei $p \in \mathbb{R}[T_1, T_2]$ ein homogenes, quadratisches Polynom in zwei Unbestimmten, d.h.: es gibt $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ mit $p(T_1, T_2) = \sum_{i+j=2} a_{ij} T_1^i T_2^j$, und sei $c \in \mathbb{R}$. Man nennt dann $Q := \{x \in \mathbb{R}^2;\ p(x) = c\}$ eine Quadrik. Zeigen Sie: Ist A positiv definit und $c > 0$, so gibt es einen orthogonalen Koordinatenwechsel $x = Sy$ ($S \in \mathrm{O}(2)$), so dass für Q in den neuen Koordinaten gilt:

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^2;\ \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$

(mit $a_1, a_2 > 0$; Q heißt dann Ellipse).

Abgabe: Freitag, 30.11.2012, 11 Uhr in der Vorlesung