Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

07.12.2012
Blatt 8

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (und damit int.) und (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f auf $[a,b]$ stetig und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

2. (4 Punkte)

   a) Zeige Sie: Eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn $(f_n) \to f$ in dem Banachraum $(\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. (Hinweis: Betrachte $|f_n(x) - f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$).

   b) Sei (f_n) in $\mathrm{C}[a,b]$ punktweise konvergent gegen f und (f_n) Cauchy-Folge in $(\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Zeigen Sie: $(f_n) \to f$ gleichmäßig, ohne die Vollständigkeit des Banachraums zu nutzen. (Hinweis: Untersuche $\left|f_n(x) - f_{m(x)}(x) + f_{m(x)}(x) - f(x)\right|$, $\forall x \in [a,b]$).

3 (4 Punkte)

   a) Sei $X = \mathrm{C}[0,1]$ und $f_n : [0,1] \to \infty$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -nx + 2, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   Berechnen Sie $\|f_n\|_\infty$ und $\|f_n - f_m\|_\infty$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie damit, dass (f_n) keinen Häufungspunkt haben kann.

   b) Zeigen Sie, dass $B := \{f \in X;\ \|f\| \leq 1\}$ zwar abgeschlossen und beschränkt, nicht aber kompakt ist. (Hinweis: BW und (a)).

4. (4 Punkte) Sei $p \in [0, \infty)$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man seine p-Norm durch

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

   ($\|\cdot\|_p$ ist tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^n$). Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Abgabe: Freitag, 14.12.2012, 11 Uhr in der Vorlesung