Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2012/13
26.10.2012
Blatt 2

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 3“

1. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}).$$
   a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Berechnen Sie alle Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist A diagonalisierbar?
   b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. Ist A diagonalisierbar?

2. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $R = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über $\mathbb{K}$ (kommutative bzgl. der Variablen $T_1, \ldots, T_n$). Für $k = 1, \ldots, n$ definiert man das k-te elementarsymmetrische Polynom in n Unbestimmten über $\mathbb{K}$ durch. Für $k = 1, \ldots, n$ definiert man das k-te elementarsymmetrische Polynom in n Unbestimmten über $\mathbb{K}$ durch
$$s_k(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} T_{i_1} \ldots T_{i_k}.$$
   a) Bestimmen Sie $s_1, s_2, s_n \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ (für $n \geq 2$) explizit.
   b) Sei $\mathcal{S}_n$ die symmetrische Gruppe (in n Einträgen) und $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Zeigen Sie (für alle $k = 1, \ldots, n$),
$$s_k\left(T_{\sigma(1)}, \ldots, T_{\sigma(n)}\right) = s_k(T_1, \ldots, T_n).$$
   c) Sei nun $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ diagonalisierbar und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ihre Eigenwerte (mit Vielfachheiten aufgeführt). Sei für $k = 1, \ldots, n$ $S_k(A) \in \mathbb{K}$ der Koeffizient von T^{n-k} im charakteristischen Polynom von A. Zeigen Sie, dass dann (für alle $k = 1, \ldots, n$) gilt:
$$S_k(A) = (-1)^k s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

3. (4 Punkte) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt 2π-periodisch, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + 2\pi) = f(x)$. Sei
$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und stetig}\}$$
und weiter für $f, g \in V$
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$
Zeigen Sie, dass $V \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein komplexer Unterraum ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Hermitische Form.

4. (4 Punkte) (Cayley-Hamilton) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ und $P_A(T) = \sum\limits_{r=0}^{n} a_r T^r$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie ($\mathbf{0} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{0}_{lm} = 0$, $1 \leq l, m \leq n$),

$$P_A(A) := \sum_{r=0}^{n} a_r A^r = \mathbf{0}.$$

(Hinweis: Folgern Sie aus der Identität ${G^{ad}}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(G^{ji})$ eine Darstellung der Form $(TE_n - A)^{ad} = \sum\limits_{r=0}^{n-1} B_r T^r$ (siehe Vorlesung). Führen Sie anschließend einen Koeffizientenvergleich der Identität $P_A(T)E_n = (TE_n - A)^{ad}(TE_n - A)$ (siehe Vorlesung) mithilfe der oben gewonnenen Darstellung durch, untersuchen Sie damit $P_A(A)$.)

Abgabe: Freitag, 02.11.2012, 11 Uhr in der Vorlesung