Universität Tübingen | Wintersemester 2013/14
Mathematatisches Institut | C. Hainzl

Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Zykloide
Wir lassen in der x-y-Ebene eine Kreisscheibe vom Radius 1 auf der x-Achse abrollen. Eine zweite Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ habe denselben Mittelpunkt und sei fest mit der ersten verbunden.

a) Beschreibe die Bahn, die ein Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe durchläuft, durch eine parametrisierte Kurve $\boldsymbol{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

b) Skizziere die Kurve für die Fälle $r < 1$, $r = 1$ und $r > 1$.

c) In welchen Fällen ist die parametrisierte Kurve regulär (d.h. $\dot{\boldsymbol{c}}(t) \neq \mathbf{0}\ \forall t \in \mathbb{R}$)?

d) Berechne im Fall $r = 1$ die Länge der Kurve für einen Umlauf der Kreisscheibe.

Aufgabe 2: Logarithmische Spirale
Sei $\boldsymbol{c}(t) = \big(a\mathrm{e}^{bt}\cos(t), a\mathrm{e}^{bt}\sin(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, a und b konstant, $b < 0 < a$, eine parametrisierte Kurve.

a) Zeige, dass $\boldsymbol{c}(t)$ für $t \to \infty$ gegen $\mathbf{0}$ konvergiert, wobei die Kurve sich um den Ursprung herumwindet.

b) Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{c}}(t) = (0, 0)$ und

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{c}}(t)| \mathrm{d}t$$

endlich ist (d.h. $\boldsymbol{c}$ hat endliche Bogenlänge auf $[0, \infty)$).

Aufgabe 3: Geraden als kürzeste Verbindung zweier Punkte
Sei $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierte Kurve. Es sei $[a, b] \subset I$ und $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{q}$, wobei $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$.

a) Zeige für jeden konstanten Vektor $\boldsymbol{v}$ mit $|\boldsymbol{v}| = 1$

$$(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v} = \int_a^b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t \leq \int_a^b |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|\, \mathrm{d}t.$$

b) Setze

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|}$$

und zeige

$$|\boldsymbol{\gamma}(b) - \boldsymbol{\gamma}(a)| \leq \int_a^b |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)| \mathrm{d}t,$$

d.h. die Kurven kürzester Länge von $\boldsymbol{\gamma}(a)$ nach $\boldsymbol{\gamma}(b)$ ist die Gerade, die diese beiden Punkte verbindet.