Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 2

Aufgabe 4:

Sei $\boldsymbol{c}$ eine reguläre, ebene (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge) parametrisierte Kurve. Zeige, dass die Krümmung der Kurve durch die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{c}}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{c}}^{\perp}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{c}}\|^3}$$

gegeben ist, wobei wir für einen Vektor $\boldsymbol{v} = \binom{v_1}{v_2}$ die Bezeichnung $\boldsymbol{v}^{\perp} := \binom{v_2}{-v_1}$ verwenden. Genauer heisst das: Ist $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} \circ \phi$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach der Bogenlänge mit Krümmung $\tilde{\kappa}$, so gilt

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi.$$

Aufgabe 5: Frenet-Gleichung

Sei $\boldsymbol{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir setzen $\boldsymbol{v} := \dot{\boldsymbol{c}}$. Sei κ die Krümmung von $\boldsymbol{c}$ und sei $\boldsymbol{n}$ der Normalenvektor. Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{n}(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

Berechne die Krümmung der Ellipse

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi], a \neq b.$$

Aufgabe 7:

Es sei $\boldsymbol{c}$ eine ebene Kurve und T die Tangente an $\boldsymbol{c}$ in $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}(t)$. Ziehe eine Gerade L parallel zur Normalen in $\boldsymbol{p}$ in einem Abstand d von $\boldsymbol{p}$. Es sei h die Länge des Segments auf L, das durch $\{\boldsymbol{c}(t)\}$ und T begrenzt wird (h ist die "Höhe" von $\boldsymbol{c}$ relativ zu T). Beweise, dass

$$|\kappa(t)| = \lim_{d \to 0} \frac{2h}{d^2},$$

wobei κ die Krümmung von $\boldsymbol{c}$ ist.

Aufgabe 8:

Sei $\boldsymbol{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene parametrisierte, geschlossene Kurve mit Umlaufzahl 1. Zeige, dass für die Krümmung κ gilt

$$\int_0^1 |\kappa(t)| \mathrm{d}t \geq 2\pi.$$