Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 3

Aufgabe 9:

Sei $\boldsymbol{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve. Zeige, dass für die Krümmung κ gilt

$$\int_0^L |\kappa(t)|\mathrm{d}t \geq 2\pi.$$

Hinweis: Zeige, dass es auf der Kurve zwei Punkte geben muss, in denen die zugehörigen Tangentialvektoren entgegengesetzt sind. Zum Beispiel, nehme per Widerspruch an, dass dies nicht gilt und zeige, dass dann die Kurve ein Graph wäre (und somit nicht geschlossen ist).

Aufgabe 10: Schraubenlinie
Berechne die Krümmung $\kappa(t)$ und die Windung $\tau(t)$ der Kurve

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t/\varphi) \\ r\sin(t/\varphi) \\ ht/\varphi \end{pmatrix},$$

wobei φ so zu wählen ist, dass $\boldsymbol{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 11:

a) Sei $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der entsteht, indem man den Kreis in der x-z-Ebene mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$ um die z-Achse rotieren lässt. Gib eine Parametrisierung $\boldsymbol{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ von $\mathbb{T}$ an und gib in jedem Punkt $\boldsymbol{p} \in \mathbb{T}$ zwei linear unabhängige Tangentialvektoren $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ an.

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$. Parametrisiere die Fläche die entsteht, wenn die Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(t, 0, f(t)\big)$ um die z-Achse rotiert wird.

Aufgabe 12:

Sei $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge) parametrisierte Kurve. Zeige, dass die Windung der Kurve durch die Formel

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2}$$

gegeben ist. Genauer heisst das: Ist $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \circ \phi$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach der Bogenlänge mit Windung $\tilde{\tau}$, so gilt

$$\tilde{\tau} = \tau \circ \phi.$$