Universität Tübingen — Wintersemester 2013/14
Mathematatisches Institut — C. Hainzl

Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Krümmungsradius
Sei $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$ eine glatte, reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Finde den durch Bogenlänge parametrisierten Kreis $\boldsymbol{k}(t)$, der die Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ im Punkt $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ berührt, den Radius $1/\kappa(t_0)$ hat und in der Ebene liegt, die von $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)$ und $\boldsymbol{n}(t_0) = \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\|\ddot{\gamma}(t_0)\|}$ aufgespannt wird. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(t_0) &= \boldsymbol{k}(t_0) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) &= \dot{\boldsymbol{k}}(t_0) \\ \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) &= \ddot{\boldsymbol{k}}(t_0). \end{aligned}$$

Aufgabe 14:

a) Sei $\boldsymbol{c}$ eine reguläre, ebene Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$. Zeige, dass $\boldsymbol{c}$ ein Kreis ist.
Hinweis: Zeige, dass die Grösse
$$\frac{\boldsymbol{n}(t)}{\kappa} + \boldsymbol{c}(t)$$
eine Konstante ist.

b) Sei $\boldsymbol{\gamma}$ eine reguläre Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und konstanter Torsion τ. Zeige, dass $\boldsymbol{\gamma}$ eine Schraubenlinie ist.

Aufgabe 15:

Betrachte die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und den Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, parametrisiert durch

$$\boldsymbol{X}_{S^2}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_{\mathbb{T}^2}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\big(R + r\cos(\varphi)\big) \\ \sin(\theta)\big(R + r\cos(\varphi)\big) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Gib die 1. Fundamentalform an. Berechne die Flächen und bestimme die Gauss-Abbildung $\boldsymbol{N}$.

Aufgabe 16:

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimme die 1. Fundamentalform von

$$\boldsymbol{X}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$$

und finde einen Ausdruck für die Oberfläche.