# Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 5

**Aufgabe 17:**

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit zwei Parametrisierungen $\boldsymbol{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to A$ und $\widetilde{\boldsymbol{X}} : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to A$. Sei

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} &: \tilde{U} \to U,\\ (\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) &\mapsto \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \big(u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)\big).\end{aligned}$$

die zugehörige Umparametrisierung, d.h. $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{\Phi}$. Die 1. Fundamentalform bezüglich $\boldsymbol{X}$ und $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}g_{ij} &= g(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = \boldsymbol{X}_i \cdot \boldsymbol{X}_j\\ \widetilde{g}_{ij} &= g(\widetilde{\boldsymbol{X}}_i, \widetilde{\boldsymbol{X}}_j) = \widetilde{\boldsymbol{X}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{X}}_j.\end{aligned}$$

Zeige, dass

$$\widetilde{g}_{ij} = g_{lm} \frac{\partial u^l}{\partial \widetilde{u}^i} \frac{\partial u^m}{\partial \widetilde{u}^j}.$$

**Aufgabe 18: Die Oberfläche ist unabhängig von der Parametrisierung**

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine durch $\boldsymbol{X} : U \to A$ parametrisierte Fläche und

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} &: \tilde{U} \to U,\\ (\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) &\mapsto \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \big(u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)\big).\end{aligned}$$

eine Umparametrisierung zur Parametrisierung $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{\Phi}$. Zeige, dass

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}(A)} \sqrt{\det(\widetilde{g}_{ij})} \mathrm{d}(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})} \mathrm{d}(u^1, u^2).$$

**Aufgabe 19:**

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit zwei Parametrisierungen $\boldsymbol{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to A$ und $\widetilde{\boldsymbol{X}} : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to A$. Sei

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} &: \tilde{U} \to U,\\ (\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) &\mapsto \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \big(u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)\big).\end{aligned}$$

die zugehörige Umparametrisierung, d.h. $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{\Phi}$. Zeige, dass

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} \circ \boldsymbol{\Phi}.$$

**Aufgabe 20:**

Seien $\boldsymbol{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{Y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zwei parametrisierte Flächen. Seien $g$ und $h$ die zugehörigen 1. Fundamentalformen. $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ heissen lokal isometrisch, falls zu jedem $\boldsymbol{u} \in U$

eine Umgebung $\widetilde{U} \ni \boldsymbol{u}$, eine Menge $\widetilde{V} \subseteq V$ und ein Diffeomorphismus (glatte Bijektion mit glatter Umkehrfunktion) $\boldsymbol{\Phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ existiert, welche $g$ in $h$ überführt, d.h.

$$g_{ij} = h_{lm} \frac{\partial \Phi^l}{\partial u^i} \frac{\partial \Phi^m}{\partial u^j}.$$

Zeige, dass Kegel (ohne Spitze), Zylinder und Ebene lokal isometrisch sind! Benutze die Parametrisierungen

$$\text{Kegel:} \qquad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2\} \qquad \boldsymbol{X}(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zylinder:} \qquad Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\} \qquad \boldsymbol{Y}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

**Hinweis:** Abrollen!