Universität Tübingen | Wintersemester 2013/14
Mathematisches Institut | C. Hainzl

Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 6

Aufgabe 21:

Bestimme $k_i^{\ j}$, k_{ij}, g_{ij} als auch G und H für Sphäre mit Radius r, Torus mit Radien R und r und Zylinder mit Radius r. Gib die verwendete Parametrisierung an.

Aufgabe 22: Sei $\boldsymbol{X} : U \to \mathbb{R}^3$ ein Graph, d.h.

$$\boldsymbol{X}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big).$$

Sei $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Finde Ausdrücke für $k_i^{\ j}$, k_{ij}, G und H bei (x_0, y_0). Wende dies auf

$$f(x, y) = 4x^2 - 2y^2 + 2xy,$$

bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ an.

Aufgabe 23:

Sei $\boldsymbol{c}(t)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist $\boldsymbol{T}(t) = \dot{\boldsymbol{c}}(t)$ eine Kurve auf dem Einheitskreis S^1. Bezeichne mit $L_{[a,b]}(\boldsymbol{c})$ die Länge der Kurve $\boldsymbol{c}$ zwischen $\boldsymbol{c}(a)$ und $\boldsymbol{c}(b)$. Zeige

$$\lim_{h \to 0} \frac{L_{[a,a+h]}(\boldsymbol{T})}{L_{[a,a+h]}(\boldsymbol{c})} = |\kappa(a)|.$$

Aufgabe 24:

Sei $\boldsymbol{X} : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\boldsymbol{c} : [a, b] \to U$ eine ebene Kurve in U. Sei $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c}$.

a) Schreibe $\partial_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c}$ in Abhängigkeit von $\dot{c}^i$, X_i und X_{ij}. Drücke $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \partial_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ durch k_{ij} aus.

b) Sei $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c}$ nach Bogenlänge parametrisiert. Es gilt $\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} = \frac{\ddot{\boldsymbol{\gamma}}}{\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}\|}$. Zeige: falls $\boldsymbol{n}(t_0) \,||\, \boldsymbol{N}(t_0)$, dann gilt

$$k\big(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)\big) = \kappa(t_0).$$