Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 7

Aufgabe 25: Drehfläche
Sei $\boldsymbol{X}(t,\varphi) = \big(r(t)\cos(\varphi), r(t)\sin(\varphi), h(t)\big)$ mit $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$.

Berechne g, k, G, H. Wo kommt die Krümmung der Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(r(t), 0, h(t)\big)$ vor?

Aufgabe 26: Regelfläche
Sei $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve und $\boldsymbol{Y}$ ein Vektorfeld längs $\boldsymbol{\gamma}$. Dann nennt man $\boldsymbol{X}(s,t) = \boldsymbol{\gamma}(s) + t\boldsymbol{Y}(s)$ eine *Regelfläche*.

Berechne g. Wie müssen $\boldsymbol{\gamma}$ und $\boldsymbol{Y}$ gewählt werden, damit $\boldsymbol{X}$ einen Zylinder oder einen Kegel parametrisiert?

Aufgabe 27:

Sei k die 2. Fundamentalform an einem Punkt der Fläche $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{u})$. Skizziere die $\boldsymbol{Y} \in T_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{X}$ mit $k(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}) = 1$ abhängig davon, ob $G > 0$ oder $G < 0$.

Aufgabe 28:

Seien $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ die Eigenvektoren der Weingartenabbildung L, also $L\boldsymbol{E}_i = \kappa_i \boldsymbol{E}_i$, mit $\|\boldsymbol{E}_i\| = 1$.

a) Zeige
$$g(L\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = g(\boldsymbol{Y}, L\boldsymbol{Z}).$$
Schliesse daraus, dass
$$g(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2) = 0,$$
falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$.

b) Sei $\boldsymbol{v}(\theta) = \boldsymbol{E}_1\cos(\theta) + \boldsymbol{E}_2\sin(\theta)$. Zeige
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k\big(\boldsymbol{v}(\theta), \boldsymbol{v}(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = H,$$
wobei H die mittlere Krümmung ist.