Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 8

Aufgabe 29: Krümmungslinien

Definition Eine Kurve $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c} : I \to \mathbb{R}^3$ heisst *Krümmungslinie* falls $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0$ und $\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}$ Hauptkrümmungsrichtung ist. Sei $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{N} \circ \boldsymbol{c}(t)$ das sphärische Bild unter der Gaussabbildung. Zeige: Falls $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \neq 0$, gilt

$$\boldsymbol{\gamma} \text{ ist Krümmungslinie} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) + \lambda(t)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = 0,$$

wobei $\lambda(t)$ die Hauptkrümmung längs $\boldsymbol{\gamma}$ ist ($\lambda = \kappa_1 \circ \boldsymbol{c}$ oder $\lambda = \kappa_2 \circ \boldsymbol{c}$).

Aufgabe 30: Torsen

Sei $\boldsymbol{X}(s,t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + s\boldsymbol{Y}(t)$ eine Regelfläche. Die Kurven zu konstantem t bzw. zu konstantem s werden *Erzeugende* bzw. *Leitkurven* genannt. Falls der Normalvektor $\boldsymbol{N}(s,t)$ konstant entlang der Erzeugenden ist, d.h. $\boldsymbol{N}_s = 0$, dann nennt man die Fläche $\boldsymbol{X}$ eine *Torse*.

Zeige: Sei $\boldsymbol{X}$ eine Regelfläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{X}$ ist Torse,

b) $\boldsymbol{X}_{st}$ ist linear abhängig von $\boldsymbol{X}_s$, $\boldsymbol{X}_t$,

c) $G = 0$.

Aufgabe 31: Tangentialfläche

Sei $\boldsymbol{X}(s,t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + s\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ für $s > 0$, so dass $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ und $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ linear unabhängig sind. Dann heisst $\boldsymbol{X}(s,t)$ *Tangentialfläche*. Zeige dass $\boldsymbol{X}$ eine Torse ist.

Aufgabe 32: Schmiegtorse

Sei $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c}$ eine Kurve auf der Fläche $\boldsymbol{X}$. Sei $\boldsymbol{Y}(t)$ ein tangentiales (d.h. $\boldsymbol{Y}(t) \in T_{\boldsymbol{c}(t)}\boldsymbol{X}$) Vektorfeld längs $\boldsymbol{\gamma}$ mit $k\big(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \boldsymbol{Y}(t)\big) = 0$ und $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ und $\boldsymbol{Y}$ linear unabhängig.

Zeige:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(s,t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + s\boldsymbol{Y}(t)$$

ist eine Torse. Man nennt sie *Schmiegtorse*.

Konstruiere den Schmiegkegel mit Öffnungswinkel θ zur Sphäre mit Radius r und zeige, dass $k\big(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \boldsymbol{Y}(t)\big) = 0$.