Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 9

Aufgabe 33: Drehfläche

Sei $\boldsymbol{X}(t,\varphi) = \big(r(t)\cos(\varphi), r(t)\sin(\varphi), h(t)\big)$ eine Drehfläche mit $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$ und konstanter Gausskrümmung G.

Berechne $r(t)$ für $G \equiv -1, 0, 1$ und skizziere das zugehörige $h(t)$.

Hinweis: $G = -\frac{\ddot{r}}{r}$.

Aufgabe 34: Euler-Charakteristik

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Fläche mit einer Triangulierung (Zerlegung der Fläche in Dreiecke) E Ecken, K Kanten und F Flächen. Dann heisst die Zahl

$$\chi(M) = E - K + F$$

die *Euler-Charakteristik* von M.

a) Berechne $\chi(M)$ für eine Triangulierung von S^2 und $\mathbb{T}^2$.

b) Zeige, dass die Formel für die Euler-Charakteristik auch für Zerlegungen der Fläche M in beliebige Polygone mit $n = 3, 4, 5, 6$ Ecken gilt.

c) Sei M ein Polyeder mit $\chi(M) = 2$ dessen Flächen Fünf- und Sechsecke sind und bei dem an jeder Ecke genau 3 Flächen zusammenstossen. Zeige, dass die Anzahl Fünfecke 12 sein muss.

d) Betrachte die Menge der Polyeder mit Euler-Charakteristik 2, bei denen jede Fläche n Ecken hat und bei denen sich an jeder Ecke gleichviele Flächen berühren. Wie viele solche Polyeder gibt es, die sich paarweise in der Anzahl Kanten, Ecken oder Flächen unterscheiden für $n = 3, 4, 5$?

Aufgabe 35:

Seien $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ zwei tangentiale ($\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}X$) Vektorfelder auf einer Fläche $\boldsymbol{X}$ mit Normale $\boldsymbol{N}$. Zeige:

$$\partial_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{Z} = \nabla_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{Z} + k(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})\boldsymbol{N}.$$

Aufgabe 36:

Sei $\boldsymbol{\gamma}(t)$ eine Kurve auf der Fläche $\boldsymbol{X}$ und seien $\boldsymbol{Y}(t)$ und $\boldsymbol{Z}(t)$ zwei tangentiale ($\boldsymbol{Y}(t), \boldsymbol{Z}(t) \in T_{\boldsymbol{\gamma}(t)}\boldsymbol{X}$) Vektorfelder entlang $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\|\boldsymbol{Y}\| = \|\boldsymbol{Z}\| = 1$. Sei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{Y}(t)$ und $\boldsymbol{Z}(t)$, definiert durch

$$\boldsymbol{Z}(t) = \cos\big(\varphi(t)\big)\boldsymbol{Y}(t) + \sin\big(\varphi(t)\big)\boldsymbol{Y}^{\perp}(t),$$

wobei $\boldsymbol{Y}^{\perp} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Y}$. Zeige, dass

$$\left[\frac{\nabla \boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}\right] - \left[\frac{\nabla \boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}t}\right] = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\left[\frac{\nabla \boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}\right] = \langle \frac{\nabla \boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Y} \rangle$.