Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 10

Aufgabe 37:

Sei $\boldsymbol{X}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ die Sphäre und sei $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{c}$ definiert durch

$$\boldsymbol{c}(t) = (\theta, \tfrac{t}{\sin(\theta)}).$$

a) Berechne die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k der Sphäre.

b) Verschiebe $\boldsymbol{Y}(0) = (0,1,0) = \frac{1}{\sin(\theta)}\boldsymbol{X}_\varphi \circ \boldsymbol{c}(0)$ parallel um $\boldsymbol{\gamma}$.

c) Mache dasselbe mithilfe des zughörigen Schmiegkegel!

d) Zeige, dass $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodäte ist, genau dann wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 38:

Verifiziere das Gauß-Bonnet-Theorem für Polyeder anhand den 5 Platonischen Körpern.

Aufgabe 39:

Verifiziere für den Dodekaeder, dass die Parallelverschiebung eines Vektors um eine Ecke genau dem Defektwinkel entspricht.