Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 11

Aufgabe 40:

Zeige, dass für eine parametrisierte Fläche $\boldsymbol{X} : U \to \mathbb{R}^3$ gilt, dass

a) $R_{likj} = G(\boldsymbol{u})(g_{ij}g_{kl} - g_{jl}g_{ki})$,
b) $R^l{}_{ikj} = G(\boldsymbol{u})(g_{ij}\delta_k{}^l - g_{jl}\delta_i{}^k)$.

Hinweis: Starte mit $R_{likj} = g(\boldsymbol{X}_l, [\nabla_k, \nabla_j]\boldsymbol{X}_i) := R(\boldsymbol{X}_l, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{X}_j)$. Untersuche R_{likj} auf Symmetrie unter Vertauschung von Indizes und vergleiche mit

$$\tilde{R}(\boldsymbol{X}_l, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{X}_j) =: G(\boldsymbol{u})\big(g(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)g(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{X}_l)\big) - g(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_l)g(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{X}_i)\big).$$

Aufgabe 41:

Betrachte die Metrik (1. Fundamentalform)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\lambda(r)}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\nu(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

mit $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2$ also

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\mathrm{e}^{2\lambda(r)} \\ g_{rr} &= \mathrm{e}^{2\nu(r)} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2\sin^2(\theta). \end{aligned}$$

und $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$.
Berechne die zugehörigen Γ_{ij}^k.

Aufgabe 42: Spezielle Relativitätstheorie

Betrachte die Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Vektoren v^μ ist $v^\mu\eta_{\mu\nu}v^\nu$ positiv und für welche negativ?
b) Die Gruppe $O(3,1)$ aller Lorentztransformationen ist definiert durch

$$O(3,1) = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{4\times 4} | \Lambda^T\eta\Lambda = \eta\}.$$

Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$, wobei $R \in SO(3)$ eine Rotation ist und

$$\Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $M, \Lambda(\phi) \in O(3,1)$.

c) In der Speziellen Relativitätstheorie beschreibt die 0. Komponente x^0 eines 4-er Vektors x^μ die Zeit und die restlichen Koordinaten x^i, $i = 1, 2, 3$ die räumliche Position. Die Lorentztransformationen rechnen diese Koordinaten zwischen verschiedenen Bezugssystemen um. Zum Beispiel transformiert $\Lambda(\phi)$ zwischen einem sich in Ruhe befindenden Bezugssystem und einem welches sich relativ dazu mit einer bestimmten Geschwindigkeit in x^1-Richtung bewegt.

i) Für ein fixes ϕ, zeichne in einem Koordinatensystem die Projektionen auf die $x^0 - x^1$-Ebene der Geraden $t \mapsto t\Lambda(\phi)\boldsymbol{e}^0$ und $t \mapsto t\Lambda(\phi)\boldsymbol{e}^1$, wobei $\boldsymbol{e}^0 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{e}^1 = (0, 1, 0, 0)^T$. Dies ist die x^0- und die x^1-Achse des bewegten Bezugssystem.

ii) Für welche $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nimmt $\Lambda(\phi)$ die Form

$$\Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an? Zeige, dass die Beziehung $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ gilt. Drücke die Steigung der x^0-Achse des transformierten Systems durch β und γ aus. Was ist die physikalische Bedeutung von β?

iii) Zeichne in einem Koordinatensystem die Projektionen auf die $x^0 - x^1$-Ebene der Kurven $\phi \mapsto \Lambda(\phi)\boldsymbol{e}^0$ und $\phi \mapsto \Lambda(\phi)\boldsymbol{e}^1$.

iv) Zeichne die Enden $(0, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$ eines ruhenden Stabs, welcher auf der x^1-Achse liegt. Welche Länge hat dieser Stab im bewegten Bezugssystem?

v) Im Ursprung liege eine Uhr, die einmal bei $x^0 = 0$ und das nächste mal bei $x^0 = 1$ tickt. Zeichne diese beiden Ereignisse ins Diagramm und lese ab, wieviel Zeit zwischen den Ticks im bewegten Bezugssystem vergeht.