# Elementare Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Übungsblatt 12

**Aufgabe 43:**

Sei $\boldsymbol{X} : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten.

Entwickle $\sqrt{g_{22}}(r,\theta)$ in eine Taylorreihe, bis inklusive zur 3. Ordnung. Verwende die Relation aus der Vorlesung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{g_{22}} = -G\sqrt{g_{22}}, \qquad \frac{\partial^3}{\partial r^3}\sqrt{g_{22}} = -\frac{\partial G}{\partial r}\sqrt{g_{22}} - G\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial r}$$

und das Verhalten von $g_{22}$ bei $r=0$, um zu zeigen, dass

$$\sqrt{g_{22}}(r,\theta) = r - \frac{r^3}{6}G + R(r)$$

mit $\lim_{r\to 0}\frac{R(r)}{r^3} = 0$.

a) Folgere daraus, dass

$$G = \lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - L_r}{r^3}\frac{3}{\pi},$$

wobei $L_r = \int_0^{2\pi}\sqrt{g_{22}(r,\theta)}\mathrm{d}\theta$ der Umfang der geodätischen Kreislinien mit Radius $r$ ist.

b) Zeige

$$G = \lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4},$$

wobei $A(r)$ der Flächeninhalt der geodätischen Kreislinie ist.

**Aufgabe 44: Schwarzschild-Metrik II**

Berechne den Riemannschen Krümmungstensor $R_{ijkl}$, bzw. $R^i{}_{jkl}$ zur Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\lambda(r)}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\nu(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

mit $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2$.

**Aufgabe 45: Geschwindigkeitsaddition in der speziellen Relativitätstheorie**

Ein Lorentz-Boost $\Lambda_{x^1}(\beta) \in O(3,1)$ in Richtung Richtung $x^1$ mit Geschwindigkeit $\beta$ (Transformation zwischen zwei Bezugssystemen mit relativgeschwindigkeit $\beta$) ist gegeben durch

$$\Lambda_{x^1}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\Lambda_{x^1}(\beta_1)\Lambda_{x^1}(\beta_2) = \Lambda_{x^1}(\tfrac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2+1}),$$

dass also die Hintereinanderschaltung von zwei Lorentz-Boosts in $x^1$-Richtung wieder ein Lorentz-Boost in $x^1$-Richtung ist.

**Hinweis:** Schreibe $\Lambda_{x^1}(\beta_i)$ in der Form

$$\Lambda_{x^1}(\beta_i) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_i) & \sinh(\phi_i) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_i) & \cosh(\phi_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und benutze

$$\begin{aligned} \cosh(s+t) &= \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t) \\ \sinh(s+t) &= \cosh(s)\sinh(t) + \sinh(s)\cosh(t). \end{aligned}$$