

Eberhard Karls Universität Tübingen  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

# Elementare Differentialgeometrie auf Kurven und Flächen

Prof. Dr. Christian Hainzl

Wintersemester 2013/2014

## **Vorwort**

Dieses Skript entstand im Wintersemester 2013/14 im Rahmen meiner Zulassungsarbeit bei Prof. Dr. Christian Hainzl an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

Bei Fragen, Wünschen oder Verbesserungsvorschlägen freue ich mich über jede E-Mail an

nadine.bellon@student.uni-tuebingen.de.

Vielen Dank!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurventheorie</b>	<b>1</b>
1.1	Kurven im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	1
1.2	Ebene Kurven . . . . .	6
1.3	Raumkurven . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Lokale Flächentheorie</b>	<b>18</b>
2.1	Flächen und Tangentialraum . . . . .	18
2.2	Die erste Fundamentalform . . . . .	22
2.3	Krümmung . . . . .	24
2.4	Die zweite Fundamentalform . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Innere Geometrie von Flächen</b>	<b>38</b>
3.1	Isometrien . . . . .	38
3.2	Kovariante Ableitung . . . . .	42
3.3	Parallelverschiebung und Geodätische . . . . .	44
3.4	Das Gauß-Bonnet Theorem . . . . .	52
3.5	Riemannscher Krümmungstensor . . . . .	59
3.6	Exponentialabbildung . . . . .	63
3.7	Minimalflächen . . . . .	71
	<b>Index</b>	<b>75</b>

# 1 Kurventheorie

## 1.1 Kurven im $\mathbb{R}^3$

**Definition 1.1.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ c &: I \rightarrow \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

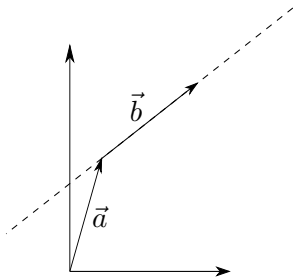
Anschaulich ist eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$  ein in den Raum gelegtes gebogenes Geradenstück.

Eine Kurve heißt *regulär*, falls der Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet:

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0, \quad \dot{c}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

**Bemerkung 1.1.2.**  $\dot{c} \neq 0$  heißt, dass sich die Kurve bewegt und nicht stehen bleibt.  $c(t)$  ist mehr als nur die Punkte im Raum. Es beschreibt, wie die Kurve durchlaufen wird.

**Beispiel 1.1.3.** a) Gerade: Eine Gerade lässt sich folgendermaßen als reguläre parametrisierte Kurve schreiben:

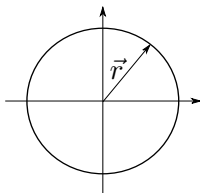


$$\begin{aligned}\gamma &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \gamma(t) &= \vec{a} + t\vec{b}, \quad a \in \mathbb{R}^3, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Dann gilt  
 $\dot{\gamma}(t) = b.$

Abbildung 1: Gerade

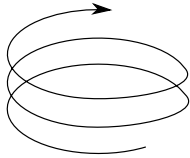
b) Kreislinie: mit Mittelpunkt  $(0,0)$  und Radius  $r > 0$ :



$$\begin{aligned}c &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ c(t) &= \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Abbildung 2: Kreis

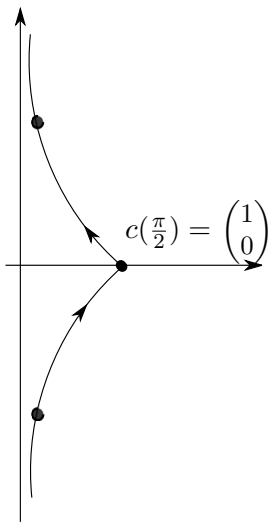
Die Kurve ist nicht injektiv: Wegen  $c(t + 2\pi) = c(t)$  wird jeder Bildpunkt unendlich oft durchlaufen.

c) Schraubenlinie

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

Abbildung 3: Schraubenlinie

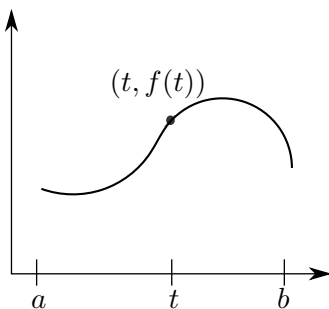
d) Traktix (Schleppkurve)

$$c : \left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

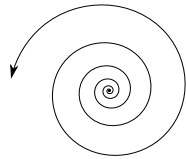
$$c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \ln \tan(t/2) \end{pmatrix}$$

$c : (0, \pi)$  ist bei  $(0, 0)$  nicht regulär!

Abbildung 4: Traktix

e)  $c(t) = (t, f(t))$ 

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

f) logarithmische Spirale

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

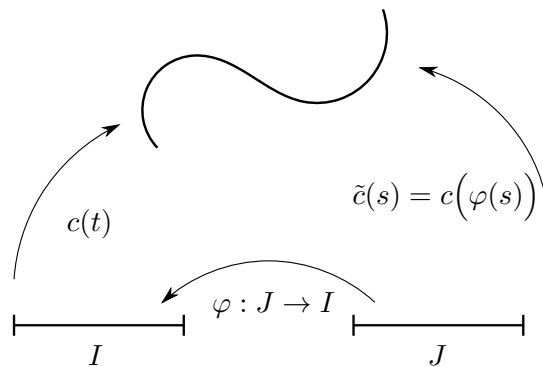
Abbildung 5: Spirale

Eine Kurve sollte nicht von der Parametrisierung abhängen.

**Definition 1.1.4.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von  $\gamma$  ist eine bijektive Abbildung  $\varphi : J \rightarrow I$ , wobei  $J$  ein weiteres Intervall ist, sodass sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$  unendlich oft differenzierbar sind.

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt *Umparametrisierung* von  $\gamma$ . (Analog für  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ )



**Bemerkung 1.1.5.** Es sollte  $\dot{\varphi} \neq 0$  gelten, damit die Umparametrisierung einer regulären Kurve regulär bleibt.

**Beispiel 1.1.6.**

$$\varphi(t) = -t : [-b, -a] \rightarrow [a, b]$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$$

kehrt den Durchlaufsinne um.

**Definition 1.1.7.** Eine Parametertransformation heißt *orientierungserhaltend*, falls  $\dot{\varphi} > 0$  für alle  $t$ , und *orientierungsumkehrend*, falls  $\dot{\varphi} < 0$  für alle  $t$ .

**Definition 1.1.8.** Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angenommen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

**Beispiel 1.1.9.** Die regulären parametrisierten Kurven

$$c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c_1(t) = (t, t),$$

und

$$c_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, c_2(t) = (\ln t, \ln t)$$

sind äquivalent, denn  $c_1 = c_2 \circ \varphi$  mit  $\varphi(t) = e^t$ , und repräsentieren daher dieselbe Kurve.

**Bemerkung 1.1.10.** Das Bild  $c(I)$  wird auch *Spur* der Kurve  $c$  genannt.

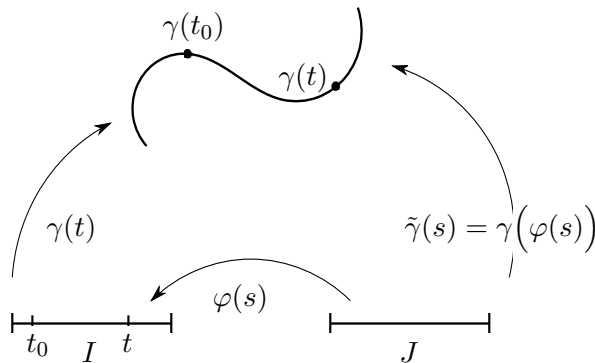
**Definition 1.1.11.** Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch orientierungserhaltende Parametertransformationen auseinander hervorgehen.

**Definition 1.1.12.** Eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  (bzw.  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) mit  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  (bzw.  $\|\dot{c}\| = 1$ ) für alle  $t \in I$ .

**Bemerkung 1.1.13.** Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven sind solche, die ihr Bild mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Wir werden nach Bogenlänge parametrisierte Kurven verwenden um Krümmung zu definieren.

**Satz 1.1.14.** Zu jeder regulären parametrisierten Kurve  $\gamma$  (bzw.  $c$ ) gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation  $\varphi$ , sodass die Umparametrisierung  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, dass also  $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = 1$ .



*Beweis.* Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre parametrisierte Kurve. Sei  $t_0 \in I$ . Setze

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(T)\| dT.$$

Dann ist  $\psi$  streng monoton wachsend, denn  $\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(T)\| dT = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ . Daher ist

$$\psi : I \rightarrow J := \psi(I)$$

eine orientierungserhaltende Parametertransformation und es existiert eine Umkehrabbildung  $\varphi(s) := \psi^{-1}(s) : J \rightarrow I$ . Dann sind  $\varphi$  und  $\psi$  unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$\dot{\varphi}(s) = \dot{\psi}^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\psi}(\psi^{-1}(s))} = \frac{1}{\dot{\psi}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|}$$

Damit und mit der Kettenregel folgt

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = \|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\| = \left\| \frac{\dot{\gamma}(\varphi(t))}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|} \right\| = 1$$

Damit ist  $\gamma \circ \varphi$  nach Bogenlänge parametrisiert. □

Wir wollen als nächstes die Länge  $L$  einer Kurve definieren. Sei

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ c &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Wir nähern  $c$  an durch einen Polygonzug  $P_1$  und einen zweiten Polygonzug  $P_2$  mit  $P_1 \subset P_2$ :

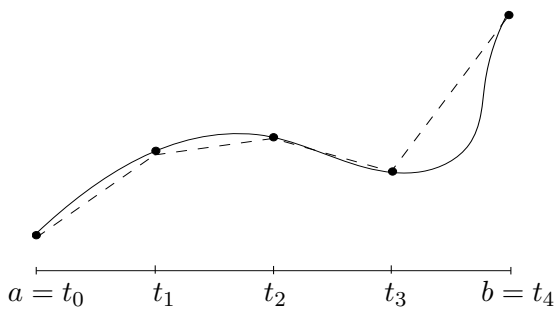


Abbildung 6: Polygonzug  $P_1$

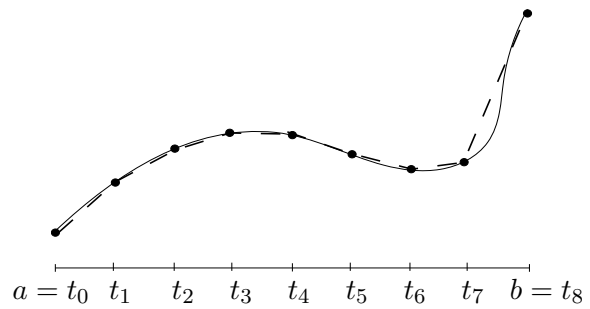


Abbildung 7: Polygonzug  $P_2$

Dann gilt für die Länge der Polygonzüge  $L(P_1) \leq L(P_2)$  und

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \rightarrow \|\dot{c}(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \text{ für } (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0.$$

Sei  $\epsilon = \sup_i \|t_i - t_{i-1}\|$ , dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \|\dot{c}\| dt$$

Dies motiviert folgende Definition:

**Definition 1.1.15.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , bzw.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , eine parametrisierte Kurve. Dann gilt für die Länge der Kurve:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \|\dot{c}\| dt, \\ L(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt. \end{aligned}$$

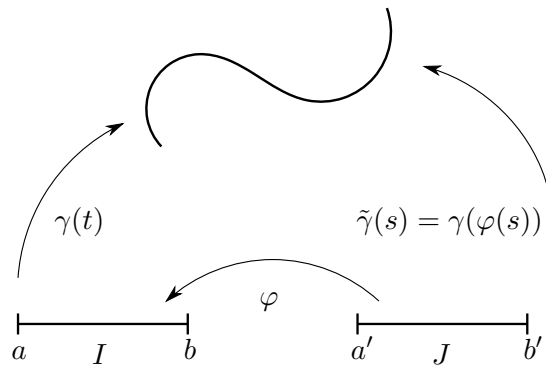
**Lemma 1.1.16.** Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung.

*Beweis.* Sei  $\dot{\varphi} > 0$ .

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) \right\| ds = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\| ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|\dot{\varphi}(s) ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = L(\gamma), \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt substituiert wurde:  $t = \varphi(s)$ ,  $\varphi(a') = a$ ,  $\varphi(b') = b$ ,  $dt = \dot{\varphi}(s) ds$ . □





**Definition 1.1.17.** Eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt *periodisch* mit Länge  $L$ , falls für alle  $t \in I$  gilt:  $c(t + L) = c(t)$  und es kein  $L'$  gibt mit  $0 < L' < L$ , so dass ebenfalls  $c(t + L') = c(t)$  für alle  $t \in I$ . Eine Kurve heißt *geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt. (Analog für  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

**Bemerkung 1.1.18.** Nicht jede Parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch. Beispielsweise lässt sich eine periodische parametrisierte Kurve so umparametrisieren, dass sie bei jedem Durchlauf der Kurve langsamer wird.

**Definition 1.1.19.** Eine geschlossene Kurve heißt *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung  $c$  mit Periode  $L$  hat, so dass  $c|_{[0,L]}$  injektiv ist.

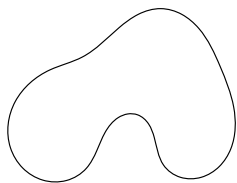


Abbildung 8: einfach geschlossen

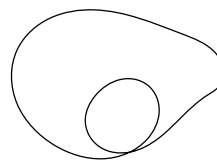
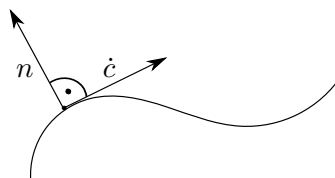


Abbildung 9: geschlossen, aber nicht einfach geschlossen

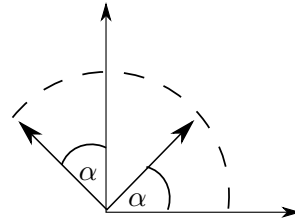
## 1.2 Ebene Kurven

Eine Besonderheit ebener Kurven ist die Möglichkeit, ihr Normalenfeld zu definieren. Sei dazu  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $\|\dot{c}\| = 1$ .



Wir definieren das *Normalenfeld* durch

$$n(t) := R\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{c} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t).$$



Dabei entspricht  $R(\alpha)$  einer Rotation um den Winkel  $\alpha$ .

Da  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt  $\|\dot{c}\|^2 = \dot{c} \cdot \dot{c} = 1$ .

(Anmerkung: Unter einer Vektormultiplikation verstehen wir hier und im Folgenden das Standardskalarprodukt der Vektoren:  $\dot{c} \cdot \dot{c} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ .)

Differentiation der obigen Gleichung liefert

$$0 = \frac{d}{dt} \|\dot{c}\|^2 = \ddot{c} \cdot \dot{c} + \dot{c} \cdot \ddot{c} = 2(\ddot{c} \cdot \dot{c})$$

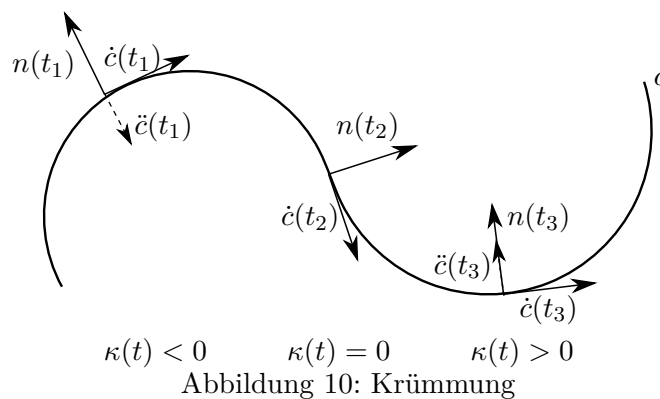
Also stehen  $\dot{c}(t)$  und  $\ddot{c}(t)$  senkrecht aufeinander und  $\ddot{c}(t)$  ist ein Vielfaches des Normalenvektors  $n(t)$ .

**Definition 1.2.1.** Die Funktion  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\ddot{c}(t) = \kappa(t)n(t)$$

heißt *Krümmung* von  $c$ .

Die Krümmung ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve von einer Geraden abweicht. Wenn  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist  $c$  eine Gerade genau dann, wenn  $\ddot{c} \equiv 0$ , d.h. wenn  $\kappa \equiv 0$ .



**Beispiel 1.2.2.** Wir betrachten die Kreislinie  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Radius  $r > 0$ , parametrisiert nach Bogenlänge durch  $c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ .

Dann gilt  $\dot{c}(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$  und  $\ddot{c}(t) = \frac{1}{r}(-\cos(t/r), -\sin(t/r)) = \frac{1}{r}n(t)$ .

Also ist  $\kappa \equiv 1/r$ .

**Bemerkung 1.2.3.** Sei  $c$  eine reguläre, (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge) parametrisierte Kurve. Die Krümmung der Kurve ist gegeben durch die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

*Beweis.* Sei  $\varphi(s) = l^{-1}(s) = t$  mit  $l(t) = \int_{-\infty}^t |\dot{c}(T)| dT$ . Dann ist  $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$  nach Bogenlänge parametrisiert, denn es gilt:

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\| = \left\| \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\| = 1$$

Dann gilt die obige Formel für die Krümmung von  $\tilde{c}$ . Denn nach Definition ist  $\tilde{c} = \kappa n$  also  $\tilde{c}^\perp = \kappa \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}}$ . Damit gilt

$$\det(\dot{\tilde{c}}(t), \ddot{\tilde{c}}(t)) = \dot{\tilde{c}} \cdot \ddot{\tilde{c}}^\perp = \kappa \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}} = \kappa$$

Nun bleibt die Formel für  $c$  zu zeigen. Wir berechnen:

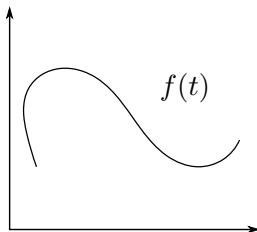
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}(s) &= \dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \\ \ddot{\tilde{c}}(s) &= \ddot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s) \\ \ddot{\tilde{c}}^\perp(s) &= \ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\dot{\tilde{c}}(t) \cdot \ddot{\tilde{c}}^\perp(t)}{\|\dot{\tilde{c}}\|^3} = \frac{\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot (\ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s))}{\|\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\|^3} \\ &= \frac{\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}(s)^3 \|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} \\ &= \frac{\dot{\varphi}(s)^3 (\dot{c}(\varphi(s)) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))) + 0}{\dot{\varphi}(s)^3 \|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} \\ &= \frac{\dot{c}(\varphi(s)) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}^\perp(t)}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} \end{aligned}$$

□

#### Beispiel 1.2.4.

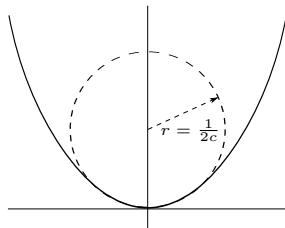


$$c(t) = (t, f(t)) \quad \dot{c} = (1, f'(t)), \quad \ddot{c} = (0, f''(t))$$

Für die Krümmung ergibt sich somit

$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix}\right)}{(1 + f'^2)^{3/2}} = \frac{f''(t)}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Sei nun  $f(x) = cx^2$ . Dann ergibt sich mit oben:



$$f'(x) = 2cx, \quad f''(x) = 2c.$$

Einsetzen in die obige Formel liefert für  $t = 0$

$$\kappa(0) = \frac{2c}{(1+0)^{3/2}} = 2c$$

Die Frage nach der Krümmung im Nullpunkt entspricht hier der Frage, welcher Kreis sich am Besten an die Parabel anschmiegt. Als Antwort bekommen wir also einen Kreis mit Radius  $r = \frac{1}{2c}$ .

**Satz 1.2.5** (Frenet-Gleichung). Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei  $v = \dot{c}$ . Sei  $\kappa$  die Krümmung von  $c$  und  $n$  der Normalenvektor. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}$$

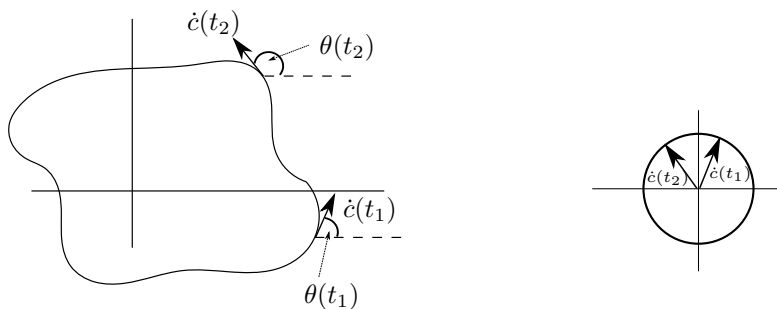
*Beweis.* Die Gleichung  $\dot{v} = \kappa n$  ist gerade die Definition der Krümmung. Durch Differentiation der Gleichung  $n \cdot n \equiv 1$  schließen wir wie oben, dass  $\dot{n}(t)$  senkrecht auf  $n(t)$  steht und daher ein Vielfaches von  $v(t)$  sein muss:  $\dot{n}(t) = \alpha(t)v(t)$ .

Wir differenzieren  $n \cdot v \equiv 0$  und erhalten

$$0 = \dot{n} \cdot v + n \cdot \dot{v} = (\alpha v) \cdot v + n \cdot (\kappa n) = \alpha + \kappa.$$

Also ist  $\alpha = -\kappa$  und damit  $\dot{n} = -\kappa v$ . □

Wir wollen nun die Krümmung als Winkeländerung betrachten.



$\theta$  misst den Winkel zwischen  $\dot{c}(t)$  und der x-Achse. Er ist nur bis auf  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , eindeutig. Jeder Einheitsvektor kann so in Form  $(\cos \theta, \sin \theta)$  geschrieben werden und es gilt  $\kappa(t) = \dot{\theta}(t)$ .

**Lemma 1.2.6.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gibt es eine  $C^\infty$ -Funktion  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \text{ und } \kappa(t) = \dot{\theta}(t).$$

$\theta$  ist eindeutig bis auf  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , festgelegt.

*Beweis.* Wir betrachten vier Halbkreise: den oberen, unteren, rechten und linken.

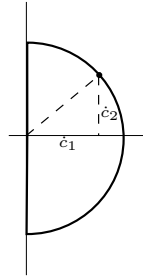
$$S_r := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, \quad S_l := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$$

$$S_o := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad S_u := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

Zu Beginn nehmen wir an, dass das Bild  $\dot{c}([a, b])$  ganz in einem der Halbkreise liegt.

Sei beispielsweise  $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} \in S_r$ .

Dann gilt nach Definition von  $S_r$   $\dot{c}_1 > 0$ .



$$\Rightarrow \frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)} = \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} = \tan \theta(t)$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

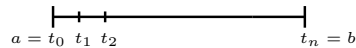
Wie man sieht, ist  $\theta$  glatt.

Die Fälle, dass  $\dot{c}([a, b])$  in einem der anderen Halbkreise liegt, werden ähnlich behandelt.

Nehmen wir jetzt an, dass  $\dot{c}([a, b])$  nicht komplett in einem der Halbkreise enthalten ist.

Wie oben findet man dann ein eindeutiges glattes  $\theta : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  wie gewünscht und  $\theta(t_1)$  ist

Dann unterteilen wir das Intervall  $[a, b]$  so, dass jedes  $\dot{c}([t_i, t_{i+1}])$  in einem Halbkreis liegt.



festgelegt. Weiter finden wir eine glatte Fortsetzung  $\theta : [a, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  und induktiv eine glatte Abbildung  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der Startwert  $\theta(a)$  ist nur bis auf  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  eindeutig, daher ist  $\theta$  eindeutig bis auf  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . □

**Definition 1.2.7.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, periodisch mit Länge  $L$ . Sei  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\dot{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Dann heißt

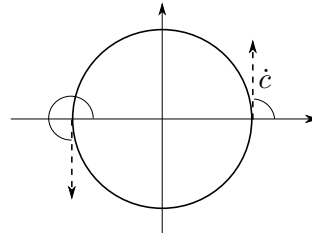
$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

*Umlaufzahl* von  $c$ .

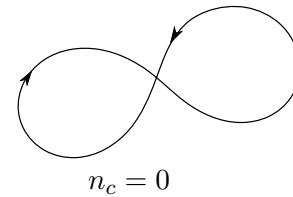
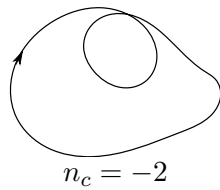
**Beispiel 1.2.8.** Der Kreis vom Radius  $r > 0$  hat die Bogenlängenparametrisierung  $c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$  mit Periode  $L = 2\pi r$ . Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich Damit erhalten wir als Winkelfunktion  $\theta(t) = t/r + \pi/2$  und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi r}{r} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t/r) \\ \cos(t/r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t/r + \pi/2) \\ \sin(t/r + \pi/2) \end{pmatrix}$$



**Beispiel 1.2.9.**



**Satz 1.2.10.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode  $L$ . Sei  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Krümmung von  $c$ . Dann gilt

$$n_c \in \mathbb{Z}$$

und

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt.$$

*Beweis.* Da  $c$  geschlossene Kurve, gilt:

$$c(L) = c(0), \dot{c}(L) = \dot{c}(0)$$

Aus Lemma 1.25 folgt:  $\dot{c}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$

Damit und mit  $e^{ia} = \cos a + i \sin a$  folgt:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta(L) \\ \sin \theta(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(0) \\ \sin \theta(0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^{i\theta(L)} = e^{i\theta(0)}$$

$\Rightarrow \theta(L) = \theta(0) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ , mit  $e^{ik2\pi} = 1$ .

Daraus ergibt sich

$$n_c = \frac{1}{2\pi} (\theta(L) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \dot{\theta}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt$$

□

**Satz 1.2.11** (Umlaufsatz). Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder  $-1$ .

**Definition 1.2.12.** Eine stückweise glatte Kurve ist eine stetige Funktion  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so dass es eine Einteilung von  $I = [a, b]$  gibt:

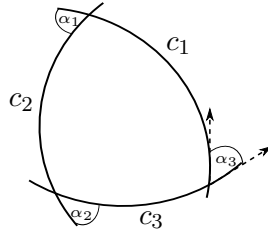
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

mit  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$  glatte reguläre parametrisierte Kurve für alle  $i = 0, \dots, n$ .

**Bemerkung 1.2.13.** Die Umlaufzahl einer stückweise glatten Kurve  $c$  mit  $c_i : I_i = [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^2, |\dot{c}_i| = 1, i = 0, \dots, n$  ist gegeben durch:

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n (\theta_j(t_j) - \theta_j(t_{j-1})) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j = \frac{1}{2\pi} \int_{I_i} \kappa(t) dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

wobei  $\alpha_j$  der Winkel zwischen den Tangenten an der  $j$ -ten Ecke ist. Wir können also folgern:



**Satz 1.2.14** (Umlaufsatz für stückweise glatte Kurven). *Eine stückweise glatte reguläre einfach geschlossene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder  $-1$ .*

Als nächstes wollen wir uns mit einem klassischen Optimierungsproblem befassen. Wie müsste man einen Weidezaun der festen Länge  $L$  legen, damit die Fläche der Kuhweide so groß wie möglich wird?

Optimal wäre für einen Zaun der Länge  $L = 2\pi r$  ein Kreis mit Flächeninhalt  $A = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$ . Das soll im Folgenden bewiesen werden.

**Satz 1.2.15** (Isoperimetrische Ungleichung). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet, berandet von einer einfach geschlossenen ebenen Kurve  $c$ . Sei  $A[G]$  der Flächeninhalt des Gebiets. Dann gilt*

$$A[G] \leq \frac{L[c]^2}{4\pi}.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn  $c$  ein Kreis ist.*

*Beweis.* Sei  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$  eine einfach geschlossene ebene Kurve mit  $L = L[c]$ .

Es gilt die Gleichung

$$|A| = \iint_A 1 d(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^L (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

Dies folgt aus dem Satz von Green:

$$F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_0^L F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \int_0^L (P\dot{x} + Q\dot{y}) dt = \iint_A (Q_x - P_y) d(x, y)$$

wobei  $F = \frac{1}{2}(-y, x), Q = \frac{x}{2}, P = -\frac{y}{2}$ .

Wir identifizieren  $\mathbb{R}^2$  nun mit der komplexen Zahlenebene und betrachten

$$\tilde{z}(t) = x(t) + iy(t)$$

Durch Parametertransformation erhalten wir

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(t) = x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}t\right).$$

$z$  ist damit eine  $2\pi$ -periodische Funktion in  $\mathbb{C}$ :  $z(2\pi) = x(L) + iy(L) = z(0)$ .

Wir wissen, dass wir jede glatte Funktion punktweise in eine Fourier-Reihe entwickeln können

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourier-Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ .

Nun können wir mit den Fourier-Koeffizienten die Länge von  $c$  ausdrücken.

Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left\| \dot{c}\left(\frac{Lt}{2\pi}\right) \right\|^2 dt = \frac{L^2}{2\pi},$$

ebenso wie

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \dot{z}(t) \bar{\dot{z}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt} \bar{c}_l (-il) e^{-ilt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k,l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt + \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 dt \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 2\pi. \end{aligned}$$

Zusammen folgt für die Länge von  $c$ :

$$L[c]^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2.$$

Als nächstes drücken wir auch den Flächeninhalt  $A[G]$  mit Fourier-Koeffizienten aus.

$$\begin{aligned} 2A[G] &= \int_0^L (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt = -\Im \int_0^{2\pi} \bar{z}(t) \dot{z}(t) dt \\ &= -\Im \int_0^{2\pi} \sum_{l,k=-\infty}^{\infty} -ik \bar{c}_k c_l e^{(l-k)it} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 2\pi. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{A[G]}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2}$$



Und damit

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn alle  $c_k = 0$  für  $k \neq 0, 1$ . Dies würde genau bedeuten

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},$$

das heißt,  $c$  beschreibt einen Kreis. □

### 1.3 Raumkurven

**Definition 1.3.1.** Eine parametrisierte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *parametrisierte Raumkurve*. Analog sind *reguläre parametrisierte Raumkurven* und *orientierte Raumkurven* definiert.

**Definition 1.3.2.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|$ , heißt *Krümmung* von  $\gamma$ .

$\kappa(t)$  ist per Definition positiv und gibt wieder ein Maß dafür an, wie stark die Kurve gekrümmt ist.

**Definition 1.3.3.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei  $t_0 \in I$  und  $\kappa(t_0) \neq 0$ . Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\|\ddot{\gamma}(t_0)\|}$$

der *Normalenvektor* von  $\gamma$  in  $t_0$ .

Da  $\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = 0$ , gilt  $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ , also

$$n \cdot \dot{\gamma} = 0.$$

Also steht  $n(t)$  senkrecht auf  $\dot{\gamma}(t)$ . Da wir jetzt den Normalenvektor haben, können wir zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  vervollständigen und folgendes definieren:

**Definition 1.3.4.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei  $t_0 \in I$  und  $\kappa(t_0) \neq 0$ . Dann heißt

$$b(t_0) = \dot{\gamma}(t_0) \times n(t_0)$$

*Binomialvektor* von  $\gamma$  in  $t_0$ .

**Definition 1.3.5.** Die Orthonormalbasis  $(\dot{\gamma}(t_0), n(t_0), b(t_0))$  heißt *begleitendes Dreibein* von  $\gamma$  in  $t_0$ .

**Definition 1.3.6.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei  $t_0 \in I$  mit  $\kappa(t_0) \neq 0$ , und sei  $(\dot{\gamma}(t_0), n(t_0), b(t_0))$  das begleitende Dreibein von  $\gamma$  in  $t_0$ . Dann heißt

$$\tau(t_0) := \dot{n}(t_0) \cdot b(t_0)$$

die *Windung*, oder auch *Torsion* von  $\gamma$  in  $t_0$ .

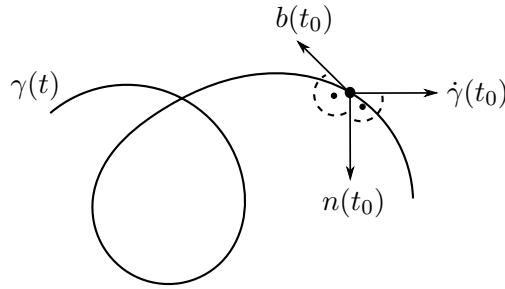


Abbildung 11: Raumkurve mit begleitendem Dreibein

**Proposition 1.3.7** (Frenet-Gleichung). Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung,  $\kappa(t) > 0$  für alle  $t \in I$ . Sei  $(v, n, b)$  das begleitende Dreibein von  $\gamma$ , wobei  $v = \dot{\gamma}$ , und sei  $\tau$  die Windung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Die Gleichung  $\dot{v} = \ddot{\gamma} = \kappa n$  ist gerade die Definition des Normalenvektors. Somit ist die erste Zeile der  $3 \times 3$ -Matrix korrekt.

Die zweite Zeile ergibt sich mit  $\dot{n} \cdot n = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(n \cdot n) = 0$ ,  $\dot{n} \cdot v = \frac{d}{dt}(n \cdot v) - n \cdot \dot{v} = 0 - \kappa = -\kappa$  und  $\dot{n} \cdot b = \tau$ .

Die dritte Zeile schließlich folgt aus  $\dot{b} \cdot b = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(b \cdot b) = 0$ ,  $\dot{b} \cdot n = \frac{d}{dt}(b \cdot n) - b \cdot \dot{n} = 0 - \tau = -\tau$  und  $\dot{b} \cdot v = \frac{d}{dt}(b \cdot v) - b \cdot \dot{v} = 0 - b \cdot \kappa n = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 1.3.8.** Sei  $\tilde{\gamma} = R\gamma + d$ ,  $d \in \mathbb{R}^3$ ,  $R \in SO(3)$  (d.h.  $R$  ist  $3 \times 3$ -Matrix mit  $\det R = 1$ ). Dann gilt

$$\tilde{\kappa} = \kappa \text{ und } \tilde{\tau} = \tau.$$

Das heißt, durch Drehungen und Verschiebungen ändern sich Krümmung und Torsion einer Raumkurve nicht.

*Beweis.* Es gilt  $\tilde{\kappa} = \|\ddot{\tilde{\gamma}}\| = \sqrt{\ddot{\tilde{\gamma}} \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}} = \sqrt{R\ddot{\gamma} \cdot R\ddot{\gamma}} = \|R\ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\| = \kappa$ .

Für  $\tau$  gilt dann  $\tilde{\tau} = \dot{\tilde{n}} \cdot \tilde{b} = R\dot{n} \cdot Rb = \dot{n} \cdot b = \tau$ .  $\square$

**Satz 1.3.9** (Hauptsatz der Raumkurventheorie). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, seien  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatte ( $C^\infty$ -)Funktionen,  $\kappa > 0$ . Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit Krümmung  $\kappa$  und Windung  $\tau$ . Diese Raumkurve ist bis auf Drehung und Verschiebung eindeutig, das heißt bis auf  $R\gamma + d$ , wobei  $R \in SO(3)$ ,  $d \in \mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Seien

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) &= 0, \\ v(t_0) &= e_1, \\ n(t_0) &= e_2, \\ b(t_0) &= e_3. \end{aligned}$$

Dann hat das lineare gewöhnliche Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ v \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

mit obigem Anfangswertproblem nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für derartige Differentialgleichungssysteme (Picard-Lindelöf) genau eine Lösung:  $\gamma(t), v(t), n(t), b(t)$ .

Die Struktur der Matrix erhält dabei die Orthogonalität von  $v(t), n(t)$  und  $n(t)$ . □

**Beispiel 1.3.10.** Wir betrachten die Schraubenlinie  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t/a \\ r \sin t/a \\ ht/a \end{pmatrix}$

Damit ist  $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r/a \sin t/a \\ r/a \cos t/a \\ h/a \end{pmatrix}$ . Es gilt

$$1 = \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{t}{a}\right) + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + \left(\frac{h}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}$$

und damit

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Weiter erhalten wir  $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r/a^2 \cos t/a \\ -r/a^2 \sin t/a \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Damit können wir nun die Krümmung berechnen:

$$\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\frac{r^2}{a^4} \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{r^2}{a^4} \sin^2\left(\frac{t}{a}\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{a^4}} = \frac{r}{a^2} = \frac{r}{r^2 + h^2}.$$

Da  $n(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t)}$ , gilt  $n(t) = \begin{pmatrix} -\cos t/a \\ -\sin t/a \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Dadurch berechnen wir

$$b(t) = \dot{\gamma}(t) \times n(t) = \begin{pmatrix} -r/a \sin t/a \\ r/a \cos t/a \\ h/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos t/a \\ -\sin t/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h/a \sin t/a \\ -h/a \cos t/a \\ r/a \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich für die Torsion

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \dot{n}(t) \cdot b(t) = \begin{pmatrix} 1/a \sin t/a \\ -1/a \cos t/a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h/a \sin t/a \\ -h/a \cos t/a \\ r/a \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{a^2} \sin^2\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{h}{a^2} \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + 0 \\ &= \frac{h}{a^2} = \frac{h}{r^2 + h^2} \end{aligned}$$

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Wir werden die Gleichung der Kurve aufstellen, indem wir das begleitende Dreibein als Basis des  $\mathbb{R}^3$  nehmen. Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)t + \ddot{\gamma}(0)\frac{t^2}{2} + \dddot{\gamma}(0)\frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4).$$

Es gilt:

$$\ddot{\gamma} = \kappa n$$

und

$$\dddot{\gamma} = \frac{d}{dt}\ddot{\gamma} = \frac{d}{dt}(\kappa n) = \dot{\kappa}n + \kappa\dot{n} = \dot{\kappa}n + \kappa(-\kappa\dot{\gamma} - \tau b) = \dot{\kappa}n - \kappa^2\dot{\gamma} - \kappa\tau b.$$

Wir erhalten durch einsetzen und umsordieren

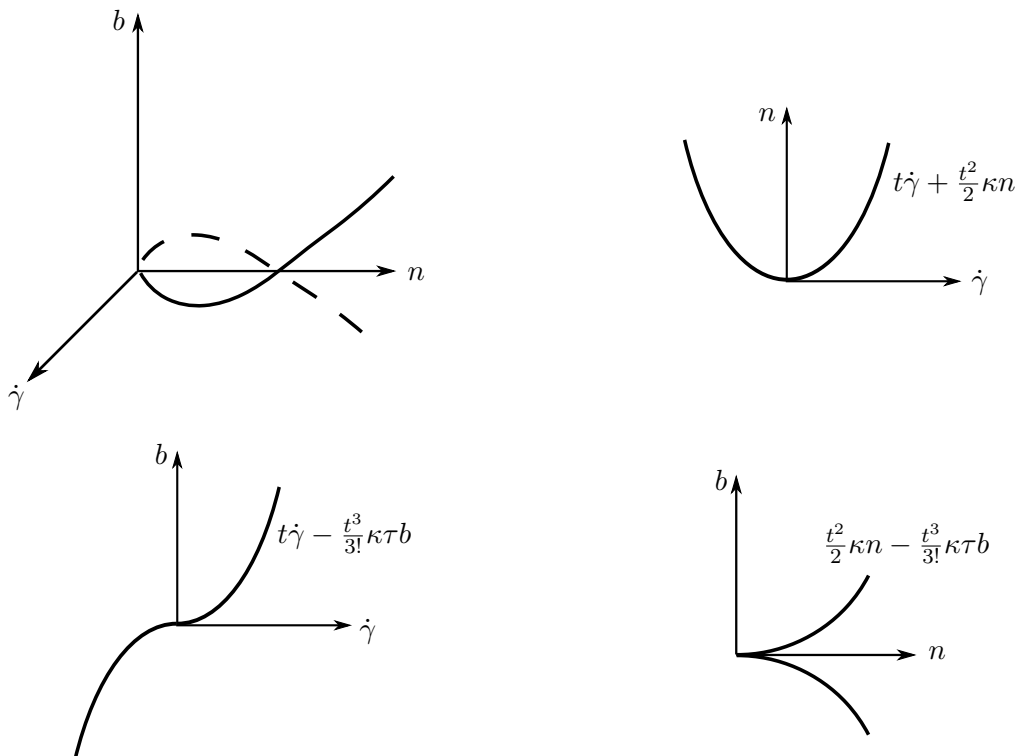
$$\gamma(t) - \gamma(0) = \dot{\gamma}(t - \frac{t^3}{3!}\kappa^2) + n(\frac{t^2}{2}\kappa + \frac{t^3}{3!}\dot{\kappa}) - \frac{t^3}{3!}b\kappa\tau + \mathcal{O}(t^4).$$

**Definition 1.3.11.** Die Darstellung von  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  bezüglich der Basis  $(v, n, b)$  durch

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3!}\kappa^2 + \mathcal{O}(t^4), \quad y(t) = \frac{t^2}{2}\kappa + \frac{t^3}{3!}\dot{\kappa} + \mathcal{O}(t^4), \quad z(t) = -\frac{t^3}{3!}\kappa\tau + \mathcal{O}(t^4)$$

heißt *lokale kanonische Form* von  $\gamma$ .

Für kleine  $t$  skizzieren wir die Projektionen der Spur von  $\gamma$  in die  $\dot{\gamma}n$ -,  $\dot{\gamma}b$ - und  $nb$ -Ebenen:



## 2 Lokale Flächentheorie

Flächen im dreidimensionalen Raum sind zweidimensionale Objekte, das heißt die Punkte auf einer Fläche können durch zwei unabhängige reelle Parameter beschrieben werden. Im Gegensatz zu Kurven, die wir stets als Ganzes parametrisiert haben, verlangen wir bei Flächen nur, dass man jeweils kleine Stücke der Fläche durch eine Parametrisierung beschreiben kann.

### 2.1 Flächen und Tangentialraum

**Definition 2.1.1.** Unter einer *parametrisierten Fläche* verstehen wir eine glatte ( $C^\infty$ -)Abbildung

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

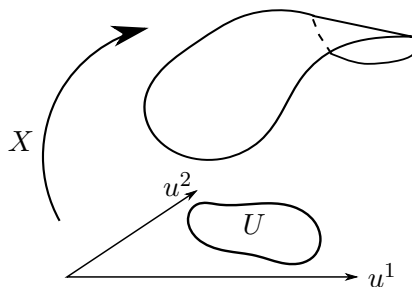
$$X(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$$

mit  $U$  offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , sodass die Jakobi-Matrix

$$dX = DX : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_u X \subset \mathbb{R}^3,$$

$$DX(y) = X_i y^i \text{ mit } X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} X, y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.



Nach der Einsteinschen Summationskonvention schreiben wir:

$$Y = \sum_{i=1}^2 X_i y^i = X_i y^i$$

**Beispiel 2.1.2.** a) Affine Ebene

$$X(u^1, u^2) = \vec{a} + u^1 \vec{b} + u^2 \vec{c}$$

Dabei ist also  $X_1 = \vec{b}$ ,  $X_2 = \vec{c}$ .

b) Funktionsgraphen Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir betrachten die Abbildung  $X(x, y, f(x, y))$ . Dann ist

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

c) Sphäre

Für  $U$  offen wählen wir:  $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$  und betrachten

$$X(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Also ist  $X = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $Y = \sin \theta \sin \varphi$  und  $Z = \cos \theta$ .

$X(U)$  überdeckt nicht die ganze Sphäre, da der Halbkreis vom Nord- zum Südpol ausgelassen wird.

d) Drehfläche

Wir betrachten eine allgemeine Fläche  $\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$ . Dann ergibt sich mit der Rotation

$$R_\varphi = e^\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgende Drehfläche:

$$X(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Für einen Torus bedeutet das beispielsweise

$$X(t, \varphi) = R_\varphi \begin{pmatrix} a \cos t + b \\ 0 \\ a \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \cos t + b) \cos \varphi \\ (a \cos t + b) \sin \varphi \\ a \sin t \end{pmatrix},$$

wobei  $0 < t, \varphi < 2\pi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definition 2.1.3.** Der *Tangentialraum*  $T_u X$  an die parametrisierte Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $u \in U$  ist der zweidimensionale Vektorraum, der von den Tangentialvektoren  $X_1, X_2$  aufgespannt wird. Das heißt,

$$Y \in T_u X \Leftrightarrow Y = y^i X_i$$

.

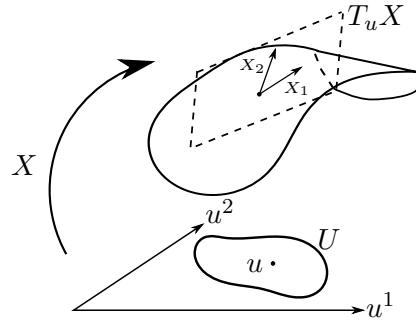
**Bemerkung 2.1.4.**  $T_u X$  stimmt überein mit der Menge der Tangentialvektoren  $\dot{\gamma}(0)$  einer glatten Kurve  $\gamma(t) = X \circ c(t)$  mit  $c(0) = u$ , wobei  $c : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Sei  $Y = y^i X_i$  und  $c(t) = u + ty$ .

Dann ist

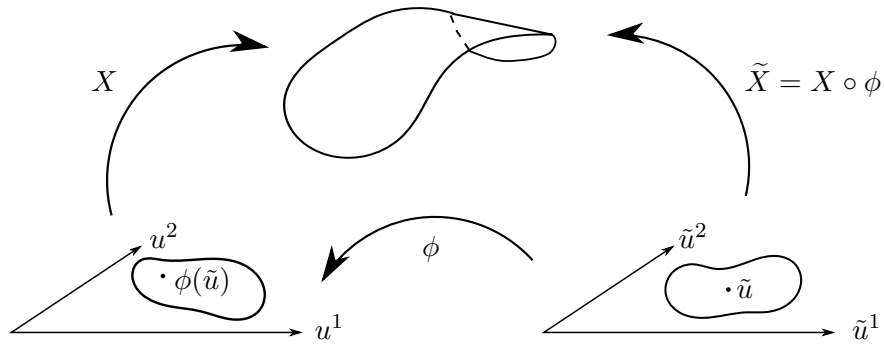
$$\begin{aligned} \gamma(t) &= X \circ c(t) = X(c^1(t), c^2(t)) \\ \dot{\gamma}(0) &= X_1 \dot{c}^1(0) + X_2 \dot{c}^2(0) = X_i y^i. \end{aligned}$$

□



**Definition 2.1.5.** Seien  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierte Flächen. Wir sagen,  $\tilde{X}$  ist eine *Umparametrisierung* von  $X$ , wenn  $\tilde{X} = X \circ \phi$ , wobei  $\phi$  ein Diffeomorphismus (das heißt eine glatte, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls glatt ist):  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$  ist.  $\phi$  heißt dann *Parametertransformation*.

Wenn  $\phi$  orientierungserhaltend ist, das heißt  $\det \phi > 0$ , dann ist  $\tilde{X}$  eine *orientierungserhaltende Umparametrisierung*.



**Proposition 2.1.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine Umparametrisierung von  $X$ . Dann gilt  $T_{\phi(\tilde{u})}X = T_{\tilde{u}}\tilde{X}$ . Sei weiter  $Z \in T_{\phi(\tilde{u})}\tilde{X}$  und  $Z = z^i X_i = \tilde{z}^j \tilde{X}_j$ . Dann gilt

$$z^i = \tilde{z}^j \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} = \tilde{z}^j \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j}$$

und

$$\phi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \begin{pmatrix} \phi^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ \phi^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{pmatrix}.$$

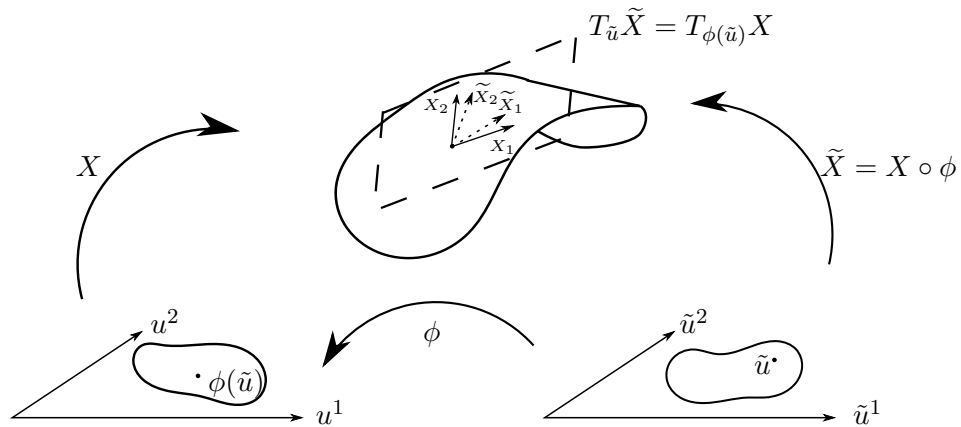
*Beweis.* Es gilt  $\tilde{X} = X \circ \phi = X(\phi^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), \phi^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$ .

Mit der Kettenregel folgt:  $\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} \tilde{X}_i = X_1 \frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{u}^j} + X_2 \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{u}^j}$ , also  $\tilde{X}_j = X_i \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j}$ .

Dadurch erhalten wir

$$Z = \tilde{z}^j \tilde{X}_j = \tilde{z}^j X_i \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j} = \tilde{z}^j X_j \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} = z^j X_j.$$

□



**Definition 2.1.7.** Ein Vektorfeld entlang einer parametrisierten Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Abbildung  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ein Vektorfeld  $Y$  ist ein *Tangentenfeld*, von  $X$ , wenn  $Y(u) \in T_u X \forall u = (u^1, u^2) \in U$ , d.h.  $Y = y^i X_i = y^i(u) X_i(u)$ . Ein Vektorfeld  $Z$  heißt *Normalenfeld* von  $X$ , wenn  $Z(u) \perp T_u X \forall u \in U$ .

**Beispiel 2.1.8.**

$$N(u^1, u^2) = \frac{X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)}{\|X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)\|}$$

ist das Einheitsnormalenvektorfeld.

$(X_1, X_2, N)$  ist positiv orientiert, aber  $\det(X_1, X_2, N)$  muss nicht notwendigerweise 1 sein.

**Definition 2.1.9.** Die Abbildung  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ , wobei  $\mathbb{S}^2$  die zweidimensionale Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  ist, mit

$$N(u^1, u^2) = \frac{X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)}{\|X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)\|}$$

heißt *Gauß-Abbildung*.

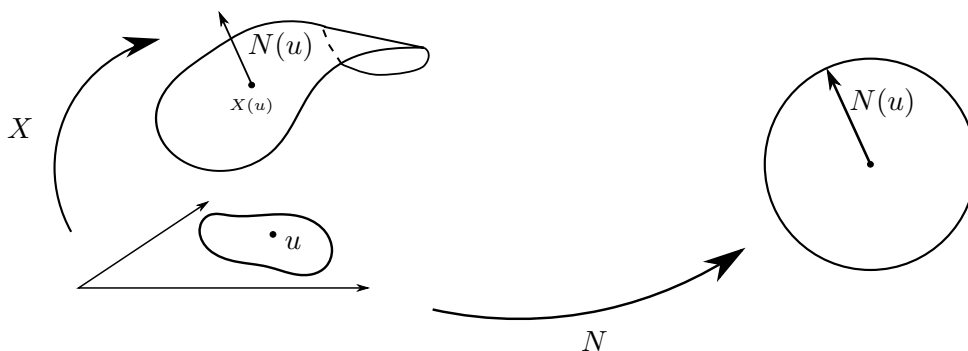


Abbildung 12: Gauß-Abbildung

**Bemerkung 2.1.10.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  die Gauß-Abbildung. Sei weiter  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine orientierungserhaltende Umparametrisierung. Dann gilt für die Gauß-Abbildung von  $\tilde{X} : \tilde{N} = N \circ \phi$ .



*Beweis.* Sei  $\tilde{u} \in \tilde{U}$ . Dann gilt

$$\tilde{N}(\tilde{u}) \perp T_{\tilde{u}}\tilde{X}.$$

Da  $T_{\phi(\tilde{u})}X = T_{\tilde{u}}\tilde{X}$ , folgt

$$\tilde{N}(\tilde{u}) \perp T_{\phi(\tilde{u})}X \text{ sowie } N(\phi(\tilde{u})) \perp T_{\phi(\tilde{u})}X.$$

Daraus ergibt sich  $\tilde{N}(\tilde{u}) = \pm N(\phi(\tilde{u}))$  und da  $\tilde{X}$  orientierungserhaltend ist folgt

$$\tilde{N}(\tilde{u}) = N(\phi(\tilde{u})).$$

□

## 2.2 Die erste Fundamentalform

**Definition 2.2.1.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Die *erste Fundamentalform*  $g : T_uX \times T_uX \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$g(Y, Z) = Y \cdot Z = y^i X_i \cdot z^j X_j = y^i z^j X_i \cdot X_j = y^i z^j g_{ij}$$

mit

$$Y = y^i X_i, Z = z^j X_j \text{ mit } Y, Z \in T_uX.$$

Dabei gilt

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = X_i \cdot X_j$$

Wir nennen dies die *Koordinatendarstellung* von  $g$ .

In der *Gauß-Notation* wird  $g_{ij}$  geschrieben als  $g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

In der Physik wird die erste Fundamentalform auch oft in der Form

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

geschrieben.

Als Erklärung dafür betrachten wir die Länge einer Kurve auf  $X$ , wobei wir die Notation  $c(t) = (c^1(t), c^2(t)) = (u^1(t), u^2(t))$  verwenden:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j} dt$$

Damit ergibt sich  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j}$  und durch Quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{dt^2} &= g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j = g_{ij} \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt} \\ \Rightarrow ds^2 &= g_{ij} dc^i dc^j = g_{ij} du^i du^j \end{aligned}$$

**Beispiel 2.2.2.** Sphäre

$X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  Es gilt  $X_\varphi = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$ . Damit ergibt sich:

$$X_\varphi \cdot X_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \sin^2 \theta.$$

Die übrigen Einträge berechnen sich analog und es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\varphi \cdot X_\varphi & X_\varphi \cdot X_\theta \\ X_\theta \cdot X_\varphi & X_\theta \cdot X_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und  $ds^2 = \sin^2 \theta d^2\varphi + d^2\theta$ .

**Bemerkung 2.2.3.** Die erste Fundamentalform  $g : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform, das heißt:

- $g(Y, Y) \geq 0 \quad \forall Y \in T_u X$ .
- $g(Y, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$
- $g(Y, Z) = g(Z, Y) \quad \forall Z, Y \in T_u X$ .
- $g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z) \quad \forall X, Y, Z \in T_u X$  und  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definition 2.2.4.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $g : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$  ihre erste Fundamentalform. Der Winkel  $\theta$  zwischen zwei Vektoren  $Y, Z \in T_u X$  ist gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{g(Y, Z)}{\sqrt{g(Y, Y)g(Z, Z)}}.$$

Der Winkel zwischen zwei Kurven ist definiert als der Winkel zwischen ihren Tangentialvektoren.

**Proposition 2.2.5.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine Umparametrisierung von  $X$ . Sei  $g_{ij}$  die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalform von  $X$  und sei  $\tilde{g}_{ij}$  die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalform von  $\tilde{X}$ . Dann gilt

$$\tilde{g}_{ij} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}$$

mit der Jakobi-Matrix  $d\phi = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}$ .

*Beweis.*

$$\tilde{g}_{ij} = g(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) = g\left(\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} X_k, \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} X_l\right) = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g(X_k, X_l) = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}.$$

□

**Definition 2.2.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Sei  $g_{ij}$  die erste Fundamentalf orm von  $X$ . Wir definieren denn *Flächeninhalt*  $A_X(V)$  einer Fläche  $X(V)$  mit  $V \subset U$ :

$$A_X(V) = \int_V dA = \iint_V \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2$$

**Bemerkung 2.2.7.** Obige Definition des Flächeninhalts stimmt mit der üblichen Definition  $\iint_V |X_1(u) \times X_2(u)| du^1 du^2$  überein, denn es gilt

$$\begin{aligned} |X_1 \times X_2|^2 &= |X_1|^2 |X_2|^2 \sin^2 \theta = |X_1|^2 |X_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |X_1|^2 |X_2|^2 - |X_1|^2 |X_2|^2 \cos^2 \theta \\ &= (X_1 \cdot X_1)(X_2 \cdot X_2) - (X_1 \cdot X_2)^2 = \det \begin{pmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 \end{pmatrix} = \det g_{ij}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$A_X(V) = \iint_V |X_1(u) \times X_2(u)| du^1 du^2 = \iint_V \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2.$$

**Bemerkung 2.2.8.** Der Flächeninhalt ist unabhängig von der Parametrisierung.

*Beweis.* Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine Umparametrisierung von  $X$ . Sei  $g_{ij}$  die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalf orm von  $X$  und sei  $\tilde{g}_{ij}$  die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalf orm von  $\tilde{X}$ . Sei  $V \subset U$  und  $\tilde{V} = \phi(V)$ .

Dann gilt für die Fläche von  $\tilde{X}(\tilde{V})$  (bzw.  $X(V)$ ):

$$\begin{aligned} A_{\tilde{X}}(\tilde{V}) &= \iint_{\tilde{V}} \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_V \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_{lk} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^j} \end{pmatrix}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \\ &= \iint_V \sqrt{\det g_{lk}} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{u}^i} \end{pmatrix} \right| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_V \sqrt{\det g_{lk}} d(u^1, u^2) \\ &= A_X(V) \end{aligned}$$

□

## 2.3 Krümmung

Bei Kurven gibt  $\kappa$  die Änderung des Tangentialvektors  $\dot{\gamma}$  an. Da dieser bei Flächen nicht eindeutig ist, brauchen wir einen neuen Krümmungsbegriff.

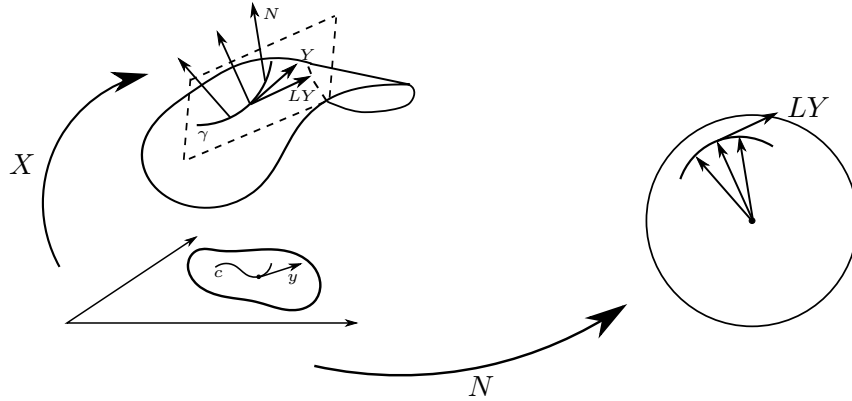
**Definition 2.3.1.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld  $N$ . Wir definieren die *Weingarten-Abbildung*

$$L : T_u X \rightarrow T_u X,$$

$$LY := -\frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0} = -N_i \dot{c}^i(0) = -N_i y^i =: -\partial_Y N$$

für  $Y = y^i X_i \in T_u X$ , wobei  $\gamma = X \circ c$  und  $\dot{c}(0) = y$ .

$LY$  gibt also die Änderung von  $N$  an, wenn  $N$  entlang einer Kurve  $\gamma$  mit  $\dot{\gamma}(0) = Y$  bewegt wird.



**Bemerkung 2.3.2.** Es gilt  $-\partial_Y N \in T_u X$ , also gilt für das Bild von  $L$

$$L(Y) \in T_u X \quad \forall Y \in T_u X$$

*Beweis.* Es gilt:  $N \cdot N = 1$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{d}{du^i} (N \cdot N) \\ \Rightarrow 0 &= 2N_i \cdot N = 0 \end{aligned}$$

Also folgt:  $N_i \in T_u X$ . □

$L$  kann in Matrixform geschrieben werden:

$$L : T_u X \rightarrow T_u X$$

$$M_{\mathcal{A}}(L) = ((LX_1)_{\mathcal{A}}), (LX_2)_{\mathcal{A}}),$$

mit  $\mathcal{A} = (X_1, X_2)$  und  $M_{\mathcal{A}}(L) \in \text{Mat}(2 \times 2)$ .

Nach Definition gilt  $LY = -N_i Y^i$ . Also:

$$LX_1 = -N_1 = -\frac{d}{du^1} N = k_1^j X_j = k_1^1 X_1 + k_1^2 X_2$$

$$LX_2 = -N_2 = -\frac{d}{du^2} N = k_2^j X_j = k_2^1 X_1 + k_2^2 X_2$$

Damit ergibt sich die Matrix

$$M_{\mathcal{A}}(L) = k_i^j = \begin{pmatrix} k_1^1 & k_2^1 \\ k_1^2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$LY = -y^i N_i = -y^i k_i^l X_l.$$

**Satz 2.3.3.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld  $N$ , erster Fundamentalform  $g_{ij}$  und Weingarten-Abbildung  $L$ . Dann gilt für die Einträge der Matrix  $M_{\mathcal{A}}(L)$ :

$$k_i^m = (N \cdot X_{il}) g^{lm},$$

wobei  $g^{lm} = (g_{lm})^{-1}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 -N_j &= k_j^i X_i \quad | \cdot X_l \\
 -N_j \cdot X_l &= k_j^i X_i \cdot X_l \\
 -N_j \cdot X_l &= k_j^i g_{il} \\
 N \cdot X_{lj} &= k_j^i g_{il} \quad | \cdot g^{lm} \\
 \Rightarrow N \cdot X_{jl} g^{lm} &= k_j^i g_{il} g^{lm} = k_j^m.
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.3.4.** Die  $2 \times 2$ -Matrix  $k_i^j$  ist symmetrisch.  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  sind die reellen Eigenwerte der Matrix mit den Eigenvektoren  $e_1, e_2$ .

**Definition 2.3.5.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld  $N$  und Weingarten-Abbildung  $L$ .

Wir definieren die *Gauß-Krümmung*  $G$ :

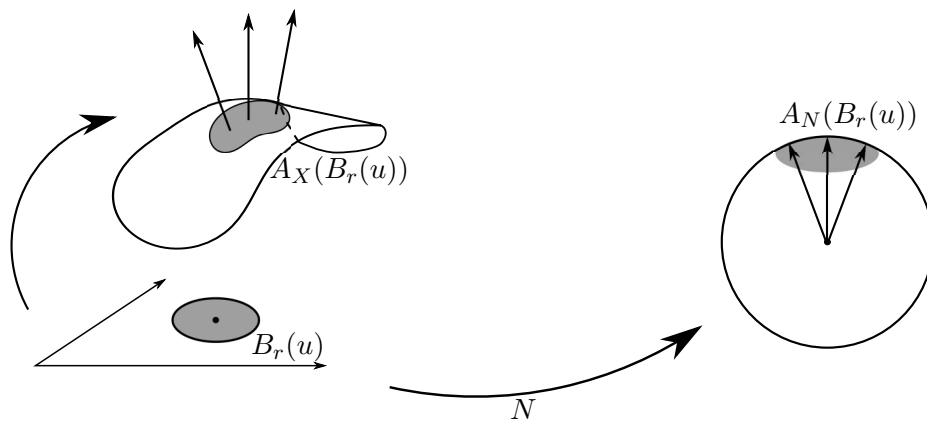
$$G = \kappa_1 \kappa_2 = \det k_i^m = k_1^1 k_2^2 - k_1^2 k_2^1 = k_1^1 k_2^2 - |k_1^2|^2$$

und die *mittlere Krümmung*  $H$ :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur}(k_i^j) = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2}$$

**Satz 2.3.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld  $N$  und Weingarten-Abbildung  $L$ . Sei  $G$  die Gauß-Krümmung. Sei weiter  $B_r(u) \subset U$  eine Kreisscheibe um  $u \in U$  mit Radius  $r > 0$ . Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_N(B_r(u))}{A_X(B_r(u))} = |G(u)|$$



*Beweis.* Es gilt

$$A_X(B_r(u)) = \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|N_1 \times N_2\|^2 &= |N_1|^2 |N_2|^2 \sin^2 \theta = |N_1|^2 |N_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |N_1|^2 |N_2|^2 - (N_1 \cdot N_2)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} N_1 \cdot N_1 & N_1 \cdot N_2 \\ N_2 \cdot N_1 & N_2 \cdot N_2 \end{pmatrix} = \det(N_i \cdot N_j)\end{aligned}$$

und  $N_i \cdot N_j = k_i^l X_l \cdot k_j^m X_m = k_i^l k_j^m X_l \cdot X_m = k_i^l k_j^m g_{lm}$   
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}A_N(B_r(u)) &= \iint_{B_r(u)} \|N_1 \times N_2\| d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(N_i \cdot N_j)} d(u^1, u^2) = \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(k_i^l k_j^m g_{lm})} d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(k_i^j)^2 \det(g_{ij})} d(u^1, u^2) = \iint_{B_r(u)} |\det k_i^j| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} |G(u)| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)\end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$\frac{A_N}{A_X} = \frac{\iint_{B_r(u)} |G(u)| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)}{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)} = |G(x)| \frac{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)}{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)} = |G(x)|$$

für ein  $x \in B_r(u)$ . Für  $r \rightarrow 0$  gilt wegen Stetigkeit  $x \rightarrow u$  und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 2.3.7.** Obiger Satz gilt für Kurven gleichermaßen:

Sei  $c(t)$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist  $T(t) = \dot{c}(t)$  eine Kurve auf dem Einheitskreis. Wir bezeichnen mit  $L_{[a,b]}(c)$  die Länge der Kurve  $c$  zwischen  $c(a)$  und  $c(b)$ .

Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_{[a,a+h]}(T)}{L_{[a,a+h]}(c)} = |\kappa(a)|.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_{[a,a+h]}(T)}{L_{[a,a+h]}(c)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{\int_a^{a+h} \|\dot{c}(t)\| dt} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{\int_a^{a+h} 1 dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{h}\end{aligned}$$

Wir verwenden wie oben den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Für ein  $x \in [a, a+h]$  gilt damit

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\ddot{c}(x)\| h}{h} \\ &= \|\ddot{c}(a)\| = |\kappa(a)|\end{aligned}$$

$\square$

## 2.4 Die zweite Fundamentalform

**Definition 2.4.1.** Sei  $X$  eine parametrisierte Fläche und  $Y$  und  $Z$  Tangentenvelder entlang  $X$  mit  $Y = y^i X_i$ ,  $Z = z^i X_i$ . Wir definieren die *Richtungsableitung* von  $Z$  in Richtung  $Y$  durch

$$\partial_Y Z = y^i Z_i = y^i \frac{\partial Z}{\partial u^i}.$$

**Bemerkung 2.4.2.** Die Definition der Richtungsableitung hängt ab von der Basis  $X_1, X_2$ .  $\partial_Y Z$  ist aber invariant unter Umparametrisierung. Jedoch wenn  $Y$  und  $Z$  tangential sind, dann müssen  $\partial_Y Z$  und  $\partial_Z Y$  nicht notwendigerweise tangential sein.

**Definition 2.4.3.** Wir definieren den *Kommutator* von zwei Vektorfeldern  $Y$  und  $Z$  als das Vektorfeld

$$[Y, Z] := \partial_Y Z - \partial_Z Y$$

**Satz 2.4.4.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $N$  ihr Einheitsnormalenvektorfeld. Dann gilt:

- (1) Wenn  $Y$  und  $Z$  Tangentenvfelder sind, dann gilt  $[Y, Z] \in T_u(X)$ .
- (2) Wenn  $Y, Z \in T_u(X)$ , dann gilt  $\partial_Y N \cdot Z = \partial_Z N \cdot Y$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} [Y, Z] &= \partial_Y Z - \partial_Z Y = y^i Z_i - z^i Y_i \\ &= y^i \partial_i (z^l X_l) - z^i \partial_i (y^l X_l) \\ &= y^i z^l_{,i} X_l + y^i z^l X_{li} - z^i \partial_i y^l_{,i} X_l - z^i y^l X_{il} \end{aligned}$$

Da  $X_{li} = X_{il}$  gilt damit

$$\partial_Y Z - \partial_Z Y = (y^i z^l_{,i} - z^i y^l_{,i}) X_l \in T_u X$$

und so ist (1) gezeigt.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \partial_Y N \cdot Z - \partial_Z N \cdot Y &= \partial_Y Z \cdot N - \partial_Z Y \cdot N \\ &= (\partial_Y Z - \partial_Z Y) \cdot N \\ &= [Z, Y] \cdot N = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt (2):

$$\partial_Y N \cdot Z = \partial_Z N \cdot Y$$

□

**Definition 2.4.5.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche und sei  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  ihre Gauß-Abbildung. Die *zweite Fundamentalform* ist die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} k : T_u X \times T_u X &\rightarrow \mathbb{R} \\ k(Y, Z) &= -\partial_Y N \cdot Z \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.4.6.** Für die zweite Fundamentalform gilt somit

$$k(Y, Z) = -\partial_Y N \cdot Z = LY \cdot Z = g(LY, Z)$$

mit Weingarten-Abbildung  $N$  und erster Fundamentalform  $g_{ij} = X_i \cdot X_j$ .

**Bemerkung 2.4.7.** Wir setzen  $k_{ij} = k(X_i, X_j)$  und erhalten so

$$k_{ij} = -N_i \cdot X_j = N \cdot X_{ij} \quad (1)$$

**Bemerkung 2.4.8.** Mittels Gleichung (1) bekommen wir folgenden Zusammenhang zwischen der ersten Fundamentalform  $g_{ij}$  und der zweite Fundamentalform  $k_{ij}$ :

$$k_i^m = (N \cdot X_{il})g^{lm} = k_{il}g^{lm},$$

wobei  $g^{lm} = (g_{lm})^{-1}$ .

Das bedeutet, dass wir mittels der  $g_{ij}$  die Indizes von  $k$  nach oben bzw. unten verschieben können.

**Beispiel 2.4.9.** a) Sphäre

Sei  $X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ , mit  $r > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ,  $0 < \theta < \pi$ .

Analog zu Beispiel 2.2.2. berechnen wir die erste Fundametalform

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Weiter gilt  $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Damit ist die zweite Fundametalform gegeben durch

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Für die Weingarten-Abbildung ergibt sich mit  $k_i^j = k_{il}g^{lj} = k_{il}(g_{lj}^{-1})$

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für die Gauß-Krümmung  $G$  und die mittlere Krümmung  $H$

$$G = \det k_i^j = \frac{1}{r^2}$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{r}$$

b) Torus

Sei  $X(\theta, \varphi) = (\cos \theta(R + r \cos \varphi), \sin \theta(R + r \cos \varphi), r \sin \varphi)$ , wobei  $r > 0$ ,  $R > 0$ ,  $0 < \theta, \varphi < 2\pi$ .

Wir berechnen

$$X_\theta = (-\sin \theta(R + r \cos \varphi), \cos \theta(R + r \cos \varphi), 0)$$



$$X_\varphi = (-r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi).$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich damit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt außerdem  $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$ . Damit ergibt sich die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi (R + r \cos \varphi) & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

Die Weingarten-Abbildung berechnen wir mit  $k_i^j = k_{il} g^{lj} = k_{il} (g_{lj}^{-1})$  und erhalten

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \varphi}{R + r \cos \varphi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Für Gauß-Krümmung  $G$  und die mittlere Krümmung  $H$  gilt

$$G = \det k_i^j = \frac{\cos \varphi}{r(R + r \cos \varphi)}$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{2r}$$

c) Zylinder

Sei  $X(\varphi, h) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h)$ , wobei  $r > 0$ ,  $h > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Dann gilt  $X_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$ ,  $X_h = (0, 0, 1)$ .

Für die erste Fundamentalform ergibt sich

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen  $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  und damit die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Weingarten-Abbildung  $k_i^j = k_{il} g^{lj} = k_{il} (g_{lj}^{-1})$  ist gegeben durch

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Gauß-Krümmung  $G$  und die mittlere Krümmung  $H$

$$G = \det k_i^j = 0$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{2r}$$

**Definition 2.4.10.** Eine parametrisierte Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$X(t, \varphi) = (r(t) \cos(\varphi), r(t) \sin(\varphi), h(t)), \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

nennt man *Drehfläche*.

Sie entstehen, wenn man eine ebene reguläre Kurve mit  $x = r(t)$ ,  $z = h(t)$  um die  $z$ -Achse dreht mit Drehwinkel  $\varphi$ .

**Bemerkung 2.4.11.** Nachrechnen zeigt, dass für die erste Fundamentalform  $g$ , die zweite Fundamentalform  $k$ , die Gauß-Krümmung  $G$  und die mittlere Krümmung  $H$  einer Drehfläche  $X(t, \varphi) = (r(t) \cos(\varphi), r(t) \sin(\varphi), h(t))$  mit  $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$  gilt

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{\dot{h}(\dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r})}{r}, \quad H = \frac{\dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} + \frac{\dot{h}}{r}}{2}$$

Aus  $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$  folgt aber

$$\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \quad (*)$$

und damit ergibt sich

$$G = \frac{\dot{h}\ddot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r}\ddot{h}}{r} = \frac{-\dot{r}^2\ddot{r} - \dot{h}^2\ddot{r}}{r} = -\frac{\ddot{r}}{r}$$

Sei  $\gamma(t) = (r(t), 0, h(t))$  und  $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2}$  die Krümmung von  $\gamma$ . Mit (\*) folgt für  $\kappa$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\dot{h}^2\ddot{h}^2}{\dot{r}^2} + \ddot{h}^2} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}}$$

Da aber ebenso mit (\*) gilt  $\dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} = \dot{r}\ddot{h} + \dot{h}\frac{\dot{h}\ddot{h}}{\dot{r}} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}} = \kappa$  ergibt sich

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix}, \quad G = \frac{\dot{h}\kappa}{r}$$

**Definition 2.4.12.** Sei  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve und  $Y$  ein Vektorfeld längs  $\gamma$ . Eine parametrisierte Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$X(s, t) = \gamma(s) + tY(s)$$

heißt *Regelfläche*.

**Bemerkung 2.4.13.** (a) Ein Zylinder ist eine Regelfläche. Wir wählen

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < r, \quad 0 < s < 2\pi$$

und erhalten damit

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ t \end{pmatrix}$$

(b) Ein Kegel ist ebenso eine Regelfläche. Wir wählen die Spitze im Ursprung und

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \\ t \end{pmatrix}$$

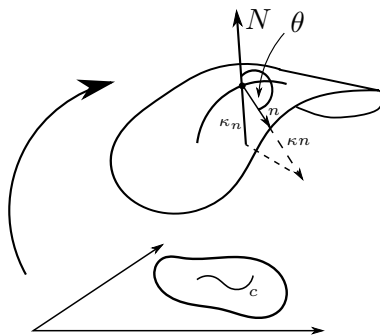
**Proposition 2.4.14.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine Umparametrisierung von  $X$ . Sei  $k_{ij}$  die Koordinatendarstellung der zweiten Fundamentalform von  $X$  und sei  $\tilde{k}_{ij}$  die Koordinatendarstellung der zweiten Fundamentalform von  $\tilde{X}$ . Dann gilt analog zur ersten Fundamentalform

$$\tilde{k}_{ij} = k(\tilde{X}_u, \tilde{X}_j) = k_{lm} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^i}$$

**Definition 2.4.15.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $\gamma = X \circ c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, d.h.  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ . Sei  $\kappa$  die Krümmung von  $\gamma$ . Wir definieren die Normalkrümmung von  $\gamma(t)$

$$\kappa_n(t) := \kappa(t) \cos \theta$$

Dabei ist  $\theta$  der Winkel zwischen dem Einheitsnormalenfeld  $N$  von  $X$  und dem Normalenvektor  $n$  von  $\gamma$ , also  $\cos \theta = N \cdot n$ .



**Satz 2.4.16.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $\gamma = X \circ c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei  $k$  die zweite Fundamentalform von  $X$  und sei  $\kappa$  die Krümmung von  $\gamma$ . Dann gilt für die Normalkrümmung von  $\gamma$

$$\kappa_n = k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

*Beweis.* Gemäß Definition 2.4.5 der zweiten Fundamentalform schließen wir

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -\partial_{\dot{\gamma}} N \cdot \dot{\gamma} = -\dot{N} \cdot \dot{\gamma} = N \cdot \ddot{\gamma} = \kappa N \cdot n = \kappa \cos \theta = \kappa_n$$

wobei verwendet wurde, dass  $\ddot{\gamma} = \kappa n$ . □

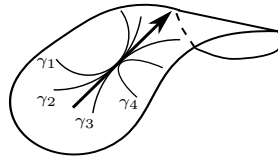
**Bemerkung 2.4.17.** Der Tangentialanteil von  $\kappa n$  auf  $X$  (das heißt die Projektion auf  $T_u X$ ) nennt man *geodätische Krümmung*  $\kappa_g$ . Es gilt

$$|\kappa_g| = |\kappa \sin \theta|.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ .

**Bemerkung 2.4.18.** Die Normalkrümmung hängt nicht von der Wahl der Kurve  $\gamma$  ab, sondern wird nur von der Fläche  $X$  bestimmt.

**Folgerung 2.4.19.** *Alle Kurven  $\gamma$  auf einer parametrisierten Fläche  $X$ , die in einem gegebenen Punkt  $u$  dieselbe Tangente  $Y$  haben, besitzen in diesem Punkt die gleiche Normalkrümmung  $\kappa_n(u)$ .*



**Bemerkung 2.4.20.** Wenn  $n \parallel N$  gilt, dann gibt die zweite Fundamentalform  $k$  die Krümmung  $\kappa$  der Kurve an:

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa$$

**Definition 2.4.21.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit zweiter Fundamentalform  $k$ . Die maximale Normalkrümmung  $\kappa_1$  und die minimale Normalkrümmung  $\kappa_2$  heißen *Hauptkrümmungen* bei  $u \in U$ . Genauer heißt das

$$\kappa_1 = \min_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)} = \min_{g(Y, Y)=1} k(Y, Y), \quad \kappa_2 = \max_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)} = \max_{g(Y, Y)=1} k(Y, Y).$$

Die Einheitsvektoren  $E_1, E_2$  bei denen Minimum und Maximum angenommen werden, heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

**Satz 2.4.22.** *Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Sei  $L : T_u X \rightarrow T_u X$  die Weingarten-Abbildung. Dann sind  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  Eigenwerte von  $L$  mit Eigenvektoren  $E_1$  und  $E_2$ .*

$$L E_1 = \kappa_1 E_1$$

$$L E_2 = \kappa_2 E_2$$

Die Eigenvektoren  $E_1, E_2$  sind orthogonal, bzw. können immer orthogonal gewählt werden, das heißt es gilt

$$g(E_1, E_2) = k(E_1, E_2) = 0.$$

*Beweis.* Sei

$$\min_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)} = \kappa_1.$$

und  $\kappa_1$  werde bei  $E_1$  angenommen, also  $\frac{k(E_1, E_1)}{g(E_1, E_1)} = \kappa_1$ .

Zu zeigen:  $LE_1 = \kappa_1 E_1$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{k(E_1 + \epsilon Y, E_1 + \epsilon Y)}{g(E_1 + \epsilon Y, E_1 + \epsilon Y)} \\ \Leftrightarrow 0 &= 2 \left( \frac{E_1, Y}{g(E_1, E_1)} - \frac{k(E_1, E_1)g(E_1, Y)}{g(E_1, E_1)^2} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= k(E_1, Y) - \kappa_1 g(E_1, Y) \quad \forall Y \in T_u X \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} k(E_1, Y) &= \kappa_1 g(E_1, Y) \\ \Leftrightarrow g(LE_1, Y) &= \kappa_1 g(E_1, Y) \\ \Leftrightarrow LE_1 \cdot Y &= \kappa_1 E_1 \cdot Y \quad \forall Y \in T_u X \end{aligned}$$

Mit  $LE_1 \cdot N = \kappa_1 E_1 \cdot N = 0$  folgt

$$LE_1 \cdot Z = \kappa_1 E_1 \cdot Z \quad \forall Z \in \mathbb{R}^3$$

Und damit

$$LE_1 = \kappa_1 E_1$$

Bleibt noch die Orthogonalität zu zeigen. Allgemein gilt für  $Y, Z \in T_u X$

$$g(LY, Z) = -\partial_Y N \cdot Z = -\partial_Z N \cdot Y = g(Y, LZ)$$

Damit erhalten wir

$$\kappa_2 g(E_1, E_2) = g(E_1, LE_2) = g(LE_1, E_2) = \kappa_1 g(E_1, E_2)$$

Für den Fall  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  folgt damit

$$g(E_1, E_2) = 0$$

und da  $g(E_1, LE_2) = k(E_1, E_2)$  folgt dies auch für  $k$ . □

**Bemerkung 2.4.23** (Euler-Formel). Sei  $Y$  ein beliebiger Einheitsvektor, also  $Y \in T_u X$  und  $g(Y, Y) = 1$ . Wir können  $Y$  in der Basis  $E_1, E_2$  ausdrücken durch

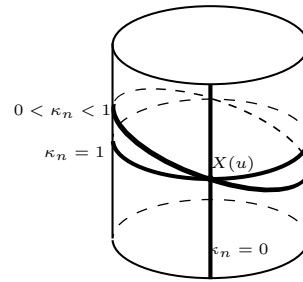
$$Y = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2.$$

Durch Einsetzen in die zweite Fundamentalform erhalten wir die *Euler-Formel* für die Normalkrümmung:

$$\begin{aligned} k(Y, Y) &= k(\cos \theta E_1 + \sin \theta E_2, \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2) \\ &= k(E_1, E_1) \cos^2 \theta + k(E_2, E_2) \sin^2 \theta \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

**Beispiel 2.4.24.**

Wir betrachten die Parametrisierung  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eines Zylinders. Sei  $u \in U$ . Der Durchschnitt von  $X$  mit der Normalebene im Punkt  $X(u)$  gibt entweder einen Kreis, eine Ellipse oder eine Gerade. Dementsprechend gilt  $0 \leq \kappa_n \leq 1$ .



**Bemerkung 2.4.25.** Mit  $k_i^j = k_{il}g^{lj}$  folgt für die Gauß-Krümmung

$$G = \det(k_i^j) = \det(k_{il}g^{lj}) = \det(k_{im}) \det(g^{mj}) = \frac{\det(k_{ik})}{\det(g_{ij})}$$

**Lemma 2.4.26.** Für die Gauß-Krümmung  $G$  gilt

$$G = 2H^2 - \frac{1}{2}k_{ij}k^{ij}$$

*Beweis.*

$$k_{ij}k^{ij} = \text{Spur}L^2 = \text{Spur}k_i^j k_j^i = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = 4H^2 - 2G$$

□

**Bemerkung 2.4.27.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Mit der Taylor-Entwicklung folgt

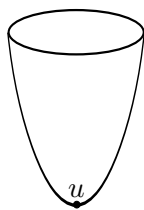
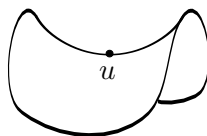
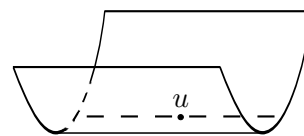
$$X(u) - X(0) = X_i(0)u^i + \frac{1}{2}X_{ij}(0)u^i u^j + \mathcal{O}(u^3)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} X(u) - X(0) - X_i(0)u^i &= \frac{1}{2}X_{ij}(0)u^i u^j + \mathcal{O}(u^3) \quad | \cdot N \\ (X(u) - X(0) - X_i(0)u^i) \cdot N &= \frac{1}{2}k_{ij}(0)u^i u^j + \mathcal{O}(u^3) \end{aligned}$$

Wir nennen einen Punkt der Fläche

- *elliptisch*, wenn  $G(u) > 0$
- *hyperbolisch*, wenn  $G(u) < 0$
- *parabolisch*, wenn  $G(u) = 0$
- *Nabelpunkt*, wenn  $\kappa_1 = \kappa_2$
- *Flachpunkt*, wenn  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ .

Abbildung 13:  $G(u) > 0$ Abbildung 14:  $G(u) < 0$ Abbildung 15:  $G(u) = 0$ 

**Beispiel 2.4.28.** Sei  $X(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$  mit  $f(0, 0) = 0$  und  $\nabla f(0, 0) = 0$ .

dann ist

$$k_{ij} = X_{ij} \cdot N = (\text{Hess}f)(0, 0).$$

**Definition 2.4.29.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche.  $Y \in T_u X$  ist eine *Asymptotenrichtung*, von  $X$  bei  $u$ , falls die Normalkrümmung 0 ist, wenn also

$$k(Y, Y) = 0.$$

Eine Kurve  $\gamma = X \circ c$  heißt *Asymptotenlinie*, von  $X$ , falls für jedes  $\gamma(u)$  die Tangente Asymptotenrichtung ist, falls also

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0 \quad \forall u \in U.$$

**Definition 2.4.30.** Eine reguläre Kurve  $\gamma = X \circ c$  auf einer parametrisierten Fläche  $X$  heißt *Krümmungslinie*, falls  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  und  $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  in jedem Punkt  $t \in I$  eine Hauptkrümmungsrichtung ist, falls also:

$$L(\dot{\gamma}) = -\partial_{\dot{\gamma}} N = \kappa_i \dot{\gamma},$$

für entweder  $i = 1$  oder  $i = 2$ .

Daraus ergibt sich die folgende Charakterisierung der Krümmungslinien.

**Proposition 2.4.31.** Sei  $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und sei  $\beta(t) = N \circ c(t)$  das sphärische Bild unter der Gauß-Abbildung  $N$ . Dann ist  $\gamma(t)$  eine Krümmungslinie genau dann, wenn

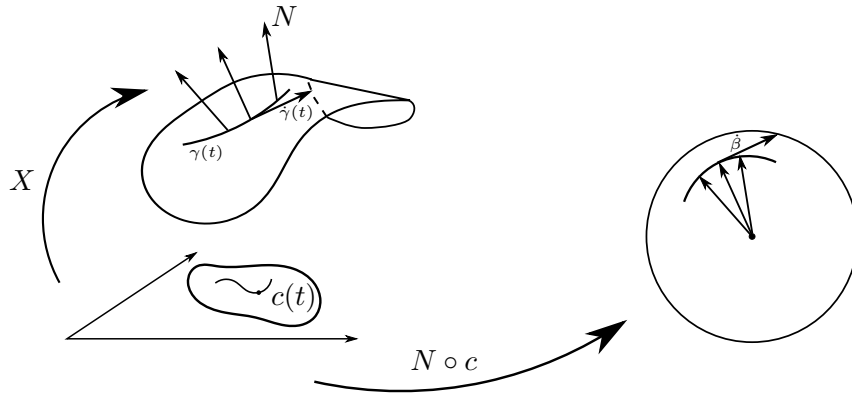
$$\dot{\beta} + \lambda(t)\dot{\gamma} = 0,$$

wobei  $\lambda(t)$  ist die Hauptkrümmung  $\kappa_1$  oder  $\kappa_2$  entlang  $\dot{\gamma}$  ist.

*Beweis.* Sei  $\dot{\beta}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) = 0$ . Da  $\dot{\gamma} = X_i \dot{c}^i(t)$  folgt  $L\dot{\gamma} = -N_i \dot{c}^i(t)$ . Außerdem gilt  $\dot{\beta}(t) = N_i \dot{c}^i(t)$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\beta}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ \Leftrightarrow 0 &= N_i \dot{c}^i + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ \Leftrightarrow 0 &= -L(\dot{\gamma}(t)) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ \Leftrightarrow L(\dot{\gamma}(t)) &= \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Also ist  $\gamma$  Krümmungslinie. □



**Definition 2.4.32.** Man nennt eine Fläche *nach Krümmungslinie parametrisiert*, wenn die Koordinatenlinien

$$\gamma_c(u^1) = X(u^1, c), \text{ und } \tilde{\gamma}_c(u^2) = X(c, u^2)$$

Krümmungslinien sind.

**Bemerkung 2.4.33.** Für eine nach Krümmungslinie parametrisierte Fläche gilt

$$\kappa_1 X_1 = \kappa_1 \dot{\gamma}_c = -\partial \dot{\gamma}_c N = -\partial u^1 N = -N_1$$

$$\kappa_2 X_2 = \kappa_2 \dot{\tilde{\gamma}}_c = -\partial \dot{\tilde{\gamma}}_c N = -\partial u^2 N = -N_2$$

Damit und mit  $k_{ij} = N \cdot X_{ij} = -N_i \cdot X_j$  erhalten wir

$$k_{11} = -N_1 \cdot X_1 = \kappa_1 X_1 \cdot X_1 = \kappa_1 g_{11}$$

$$k_{12} = -N_1 \cdot X_2 = \kappa_1 X_1 \cdot X_2 = \kappa_1 g_{12} = 0$$

$$k_{22} = -N_2 \cdot X_2 = \kappa_2 X_2 \cdot X_2 = \kappa_2 g_{22}$$

$$\Rightarrow k_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa_1 g_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_2 g_{22} \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.4.34.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und es gelte für die zweite Fundamentalform  $k_{ij} = 0$ . dann gibt es einen fixen Vektor  $a \in \mathbb{R}^3$  und eine Konstante  $b \in \mathbb{R}$ , so dass

$$X \cdot a = b$$

gilt, das heißt  $X$  ist enthalten in einer Ebene.

*Beweis.* Es gilt  $k_{ij} = -N_i \cdot X_j = 0$

$$\Rightarrow N_i \cdot N = 0 \Rightarrow N_i = 0, i \in \{1, 2\}$$

Daraus folgt, dass  $N$  konstant sein muss. Sei also  $N = a$ . Damit gilt

$$0 = X_i \cdot N = \frac{d}{du^i}(X \cdot N) = \frac{d}{du^i}(X \cdot a)$$

Daraus ergibt sich, dass  $X \cdot N$  konstant sein muss, also  $X \cdot N = X \cdot a = b$ . □



**Proposition 2.4.35.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Seien weiter alle Punkte Nabelpunkte:  $\kappa_1(u^1, u^2) = \kappa_2(u^1, u^2)$ . Dann ist  $X$  entweder in einer Ebene oder einer Sphäre enthalten.

*Beweis.* Im Fall  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  folgt automatisch, dass  $X$  in der Ebene liegen muss. Sei nun also  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa(u^1, u^2) \neq 0$ . Dann gilt  $LY = \kappa Y$  für  $Y \in T_u X$ . Aus  $LX_i = \kappa X_i$  folgt

$$-\partial_i N = \kappa X_i \Leftrightarrow N_i = -\kappa X_i =: \lambda X_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

Wir erhalten

$$N_1 = \lambda X_1, \quad N_2 = \lambda X_2$$

$$N_{12} = \lambda_2 X_1 + \lambda X_{12}, \quad N_{21} = \lambda_1 X_2 + \lambda X_{21}$$

Da aber  $N_{12} = N_{21}$ , erhalten wir

$$0 = N_{12} - N_{21} = \lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^i} \lambda(u^1, u^2) = 0$$

Damit ergibt sich, dass  $\lambda(u^1, u^2) = \lambda$  konstant sein muss.

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left( X - \frac{1}{\lambda} N \right) = 0$$

Damit ist auch  $X - \frac{1}{\lambda} N =: a$  konstant. Mit  $\|N\| = 1$  folgt

$$|X - a| = \left| \frac{1}{\lambda} \right|$$

Dies entspricht der Gleichung der Sphäre mit Radius  $\frac{1}{\lambda}$ . □

### 3 Innere Geometrie von Flächen

Unter innere Geometrie versteht man all diejenigen Eigenschaften, die nur von  $g_{ij}$  abhängen. Diese entsprechen den Eigenschaften, die zweidimensionale Lebewesen auf der Fläche erkennen würden.

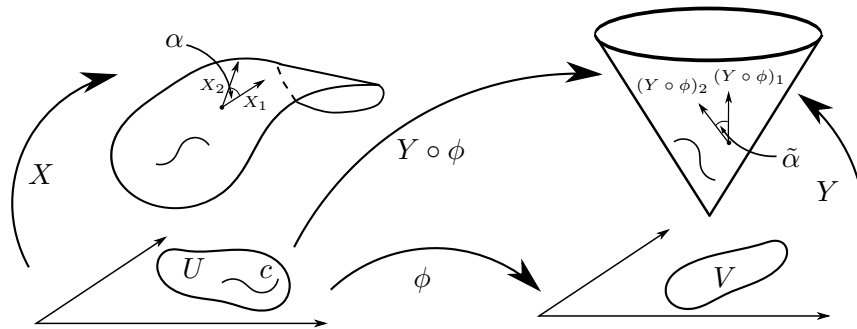
*Fragen:* Welche Krümmungsgrößen gehören dazu, sind also Größen der inneren Geometrie? ( $k_{ij}$  und  $H$  nicht, aber  $G$ )

Wie kann man Ableitungen als innere Größe definieren, also nur unter Verwendung der  $g_{ij}$ ?  
Wie die Parallelverschiebung von Vektoren?

#### 3.1 Isometrien

**Definition 3.1.1.** Seien  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierte Flächen.  $X$  und  $Y$  heißen *lokal isometrisch*, wenn es einen Diffeomorphismus  $\phi : U \rightarrow V$  gibt, mit:

$$X_i \cdot X_j = g(X_i, X_j) = g(\partial_i(Y \circ \phi), \partial_j(Y \circ \phi)) = \partial_i Y \circ \phi \cdot \partial_j Y \circ \phi$$

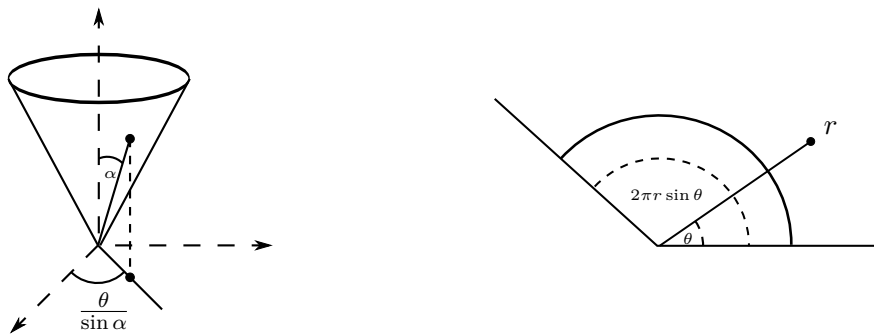


Äquivalente Definition:

Seien  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisierte Flächen, seien  $g$  und  $h$  die zugehörigen ersten Fundamentalformen.  $X$  und  $Y$  heißen *lokal isometrisch*, falls es einen Diffeomorphismus  $\phi : U \rightarrow V$  gibt, so dass

$$g_{ij} = h_{lm} \frac{\partial \phi^l}{\partial u^i} \frac{\partial \phi^m}{\partial u^j}$$

**Beispiel 3.1.2.** Man kann zeigen, dass der Kegel lokal isometrisch zu einer Ebene ist. Die Idee dabei ist es, zu zeigen, dass der Kegel auf ein Stück der Ebene abgewickelt werden kann. Sei  $U(r, \theta) \subset \mathbb{R}^2$ , mit  $0 < r$ ,  $0 < \theta < 2\pi r \sin \alpha$ . Dabei ist  $\alpha$  der Winkel an der Spitze des Kegels.



$$Y(r, \theta) = \left( r \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{r \sin \alpha} \right), r \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{r \sin \alpha} \right), r \cos \alpha \right)$$

$$X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

Nachrechnen zeigt, dass

$$X_r \cdot X_\theta = 0 = Y_r \cdot Y_\theta$$

$$X_r \cdot X_r = 1 = Y_r \cdot Y_r$$

$$X_\theta \cdot X_\theta = r^2 = Y_\theta \cdot Y_\theta.$$

Damit stimmt die erste Fundamentalform überein und die Flächen sind lokal isometrisch.

**Bemerkung 3.1.3.** Eine Isometrie  $\phi$  erhält Längen und Winkel. Sei  $\gamma = X \circ c$  und  $\gamma' = Y \circ \phi \circ c$ , dann gilt für die Länge

$$L(X \circ c) = L(Y \circ \phi \circ c)$$

da diese nur von der Metrik  $g_{ij}$  abhängt. Ebenso wie Längen werden offensichtlich auch Winkel erhalten durch die Isometrie, da

$$\cos \alpha = \frac{g(X_1, X_2)}{\sqrt{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2)}} = \frac{g((Y \circ \phi)_1, (Y \circ \phi)_2)}{\sqrt{g((Y \circ \phi)_1, (Y \circ \phi)_1)g((Y \circ \phi)_2, (Y \circ \phi)_2)}} = \cos \tilde{\alpha}$$

**Bemerkung 3.1.4.** Lokal isometrisch bedeutet, dass die erste Fundamentalform übereinstimmt. Aber es gilt

$$X \neq Y \circ \phi,$$

also ist die zweite Fundamentalform nicht gleich. Wir werden sehen, dass  $G$  nur von  $g_{ij}$  abhängen wird, d.h.  $G$  ist invariant unter Isometrien und damit eine Größe der inneren Geometrie. Das bedeutet, dass alle lokal isometrischen Flächen dieselbe Gauß-Krümmung haben.

**Definition 3.1.5.** Sei  $X(s, t) = \gamma(t) + sY(t)$  eine Regelfläche. Die Kurven zu konstantem  $t$  bzw. zu konstantem  $s$  werden *Erzeugende* bzw. *Leitkurven* genannt. Falls der Normalvektor  $N(s, t)$  konstant entlang der Erzeugenden ist, d.h.  $N_s = 0$ , dann nennt man die Fläche  $X$  eine *Torse*.

**Proposition 3.1.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Regelfläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $X$  ist Torse,
- (ii)  $X_{st}$  ist linear abhängig von  $X_s, X_t$ ,
- (iii)  $G = 0$ .

*Beweis.* Es gilt  $X_s = Y(t)$ ,  $X_t = \dot{\gamma}(t) + s\dot{Y}(t)$ ,  $X_{ss} = 0$ ,  $X_{tt} = \ddot{\gamma}(t) + s\ddot{Y}(t)$ . Da  $k_{ss} = N \cdot X_{ss} = N \cdot 0 = 0$  gilt für die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & k_{st} \\ k_{st} & k_{tt} \end{pmatrix}$$

”(a)  $\Leftrightarrow$  (c)“:

Sei  $X$  eine Torse, also  $N_s = 0$ . Nach Bemerkung 2.4.25 gilt für die Gauß-Krümmung

$$G = \frac{\det(k_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \det k_{ij} &= k_{ss}k_{tt} - (k_{st}^2) \\ &= 0 - (N \cdot X_{st})^2 \\ &= 0 - (-N_s \cdot X_t)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G = 0$$

”(c)  $\Leftrightarrow$  (b)”:

Sei  $G = 0$ . Nach Bemerkung 2.4.25 gilt für die Gauß-Krümmung  $G = \frac{\det(k_{ij})}{\det(g_{ij})}$ .

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= G \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{-(k_{st})^2}{g_{ij}} \\ \Leftrightarrow 0 &= k_{st} \\ \Leftrightarrow 0 &= X_{st} \cdot N \\ \Leftrightarrow X_{st} &\in T_u X \end{aligned}$$

Da  $T_u X$  aber von  $X_s$  und  $X_t$  aufgespannt wird folgt, dass  $X_{st}$  linear abhängig von  $X_s$  und  $X_t$  sein muss.  $\square$

**Definition 3.1.7.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit  $X(s, t) = \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$  so, dass  $\dot{\gamma}$  und  $\ddot{\gamma}$  linear unabhängig sind. Dann heißt  $X(s, t)$  *Tangentialfläche*.

**Bemerkung 3.1.8.** Sei  $X(s, t)$  eine Tangentialfläche. Dann ist  $X$  eine Torse.

*Beweis.* Sei  $X(s, t) = \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$ . Dann ist  $X_s = \dot{\gamma}(t)$  und  $X_t = \dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t)$ . Es ergibt sich für  $N$

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t) \times (\dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times (\dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t))\|} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) + s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) + s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))\|} \\ &= \frac{s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))}{\|s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))\|} \end{aligned}$$

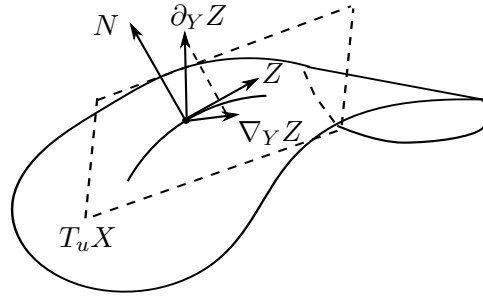
Also folgt  $N_s = 0$   $\square$

**Definition 3.1.9.** Sei  $\gamma = X \circ c$  eine Kurve auf der Fläche  $X$ . Sei  $Y(t)$  ein tangentiales (d.h.  $Y(t) \in T_{c(t)} X$ ) Vektorfeld längs  $\gamma$  mit  $k(\dot{\gamma}(t), Y(t)) = 0$  und  $\dot{\gamma}$  und  $Y$  linear unabhängig. Die Torse

$$\tilde{X}(s, t) = \gamma(t) + sY(t)$$

nennt man *Schmiegtorse*.

### 3.2 Kovariante Ableitung



Für die kovariante Ableitung des Tangentenvektorfeldes  $\dot{\gamma}$  verwenden wir die Bezeichnungen

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}|_{t=0} = \frac{\nabla^2}{dt^2}\gamma(t)|_{t=0} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$$

Diese Ableitung muss per definitionem ein Vektor im Tangentialraum  $T_u X$  sein.

Unter  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$  verstehen wir dabei die kovariante Ableitung von  $\dot{\gamma}$  in Richtung  $\dot{\gamma}$ . Im Allgemeinen bezeichnen wir  $\nabla_Y Z$  als kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $Z$  in Richtung  $Y$ .

**Erinnerung 3.2.1.** Im Allgemeinen gilt

$$\partial_Y Z = y^i \partial_i Z = y^i \partial_i (z^j X_j) = y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ji} \notin T_u X$$

Damit  $\nabla_Y Z \in T_u X$  gilt, definieren wir

$$\nabla_Y Z = P_{T_u X}(\partial_Y Z).$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}X_i \dot{c}^i = X_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i$$

**Definition 3.2.2.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine parametrisierte Fläche und  $Y, Z \in T_u X$  Tangentenvektorfelder. Wir definieren die *kovariante Ableitung*

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}(t) := P_{T_{c(t)}X}(X_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i) = (P_{T_u X} X_{ij}) \cdot \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i$$

$$\nabla_Y Z := P_{T_u X}(y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ij}) = y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j P_{T_u X}(X_{ij})$$

Mit  $P_{T_u X}$  bezeichnen wir dabei die Projektion des Vektors auf den Tangentialraum.

**Bemerkung 3.2.3.** Es gilt  $X_{ij} = \partial_{X_j} X_i = \partial_j X_i = \partial_i X_j$

**Bemerkung 3.2.4.**

$$P_{T_u X}(X_{ij}) = X_{ij} - N(X_{ij} \cdot N) = X_{ij} - N k_{ij} = \partial_j X_i - N k(X_i, X_j)$$

**Definition 3.2.5.** Wir definieren die *Christoffel-Symbole*  $\Gamma_{ij}^m$  durch

$$P_{T_u X}(X_{ij}) := \Gamma_{ij}^m X_m$$

und

$$\Gamma_{ijk} := \Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

Damit gilt

$$g(X_{ij}, X_k) = X_{ij} \cdot X_k = \Gamma_{ij}^m X_m \cdot X_k = \Gamma_{ij}^m g_{mk} = \Gamma_{ijk}$$

**Satz 3.2.6.** Die kovariante Ableitung  $\nabla_Y Z$  bzw.  $\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}$  ist eine Größe der inneren Geometrie, hängt also nur von den  $g_{ij}$  ab. Genauer gilt

(a)

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

(b)

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ijk} g^{kl} = \frac{1}{2} g^{lk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

(c)

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l, \nabla_i X_j = \Gamma_{ij}^l X_l, (\nabla_i X_j)^l = \Gamma_{ij}^l$$

(d)

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z &= y^i z_{,i}^l X_l + y^i z^l \Gamma_{li}^m X_m = y^i (z_{,i}^m + z^l \Gamma_{li}^m) X_m \\ (\nabla_Y Z)^m &= y^i z_{,i}^m + y^i z^l \Gamma_{li}^m \end{aligned}$$

(e)

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}\right)^m = \ddot{c}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{c}^i \dot{c}^j$$

*Beweis.* Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} -\partial_k g_{ij} &= -\partial_k (X_i \cdot X_j) = -X_{ik} \cdot X_j - X_i \cdot X_{jk} \\ \partial_i g_{jk} &= \partial_i (X_j \cdot X_k) = X_{ij} \cdot X_k + X_j \cdot X_{ki} \\ \partial_j g_{ki} &= \partial_j (X_k \cdot X_i) = X_{kj} \cdot X_i + X_k \cdot X_{ji} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{2}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}) = \frac{1}{2}(2X_{ij} \cdot X_k) = \Gamma_{ijk}$$

Das Übrige folgt direkt aus den Definitionen 3.2.2 und 3.2.6. □

**Korollar 3.2.7** (Ableitungsgleichungen). *Es gilt*

a)  $X_{ij} = \nabla_i X_j + X_{ij} \cdot NN = \Gamma_{ij}^k X_k + k_{ij} N$

b)  $N_i = -k_i^j X_j$

also

$$\partial_Y Z = \nabla_Y Z + k(Y, Z)N$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_Y Z &= y^i Z_i = y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ji} \\ \nabla_Y Z &= y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j (X_{ij} - N k_{ij}) \\ k(Y, Z)N &= y^i z^j k_{ij} N \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z + k(Y, Z)N &= y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ij} - y^i z^j N k_{ij} + y^i z^j k_{ij} N \\ &= \partial_Y Z \end{aligned}$$

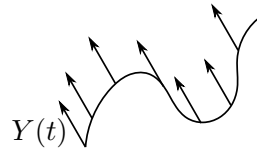
□

### 3.3 Parallelverschiebung und Geodätische

In der Ebene verstehen wir unter einer Parallelverschiebung, dass

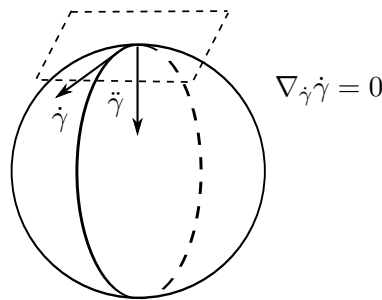
$$\frac{d}{dt} Y(t) = 0.$$

Das heißt, die Länge eines Vektors und sein Winkel mit einer festen Richtung sind konstant.



**Definition 3.3.1.** a) Sei  $Y(t)$  ein Vektorfeld entlang einer Kurve  $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $Y(t) \in T_{c(t)}X$ . Dann heißt  $Y(t)$  *parallel* längs  $\gamma$ , wenn

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = \frac{\nabla}{dt} Y(t) = 0$$



b) Sei  $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Kurve auf der Fläche  $X$ .  $\gamma(t)$  heißt *Geodätische*, falls

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0 \quad \forall t \in I.$$

c) Falls  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein tangentiales Vektorfeld längs  $X$  ist, dann heißt  $Y$  *parallel*, falls

$$\nabla_Z Y = 0 \quad \forall Z \in T_u X$$

**Bemerkung 3.3.2.** Sei  $Y = (y^1, y^2)$  ein Vektorfeld in  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $X$  eine parametrisierte Fläche.  $Y(t)$  kann auf zwei Arten geschrieben werden.

a) Mit  $a = (a^1(t), a^2(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{aligned} Y(t) &= a^i(t)X_i(c(t)) = a^1(t)X_1(c(t)) + a^2(t)X_2(c(t)) \\ \nabla_{\dot{\gamma}} Y &= \frac{\nabla}{dt} Y(t) = \dot{a}^i X_i + a^i \frac{\nabla}{dt} X_i \circ c \\ &= \dot{a}^i X_i + a^i \Gamma_{ij}^k \dot{c}^j X_k \\ &= (\dot{a}^k + \Gamma_{ij}^k a^i \dot{c}^j) X_k \end{aligned}$$

b) Wir können  $Y(t)$  aber auch mittels eines Vektorfeldes  $Y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$  schreiben. Dann gilt

$$\begin{aligned} Y(t) &= y^i(c(t))X_i(c(t)) \\ \nabla_{\dot{\gamma}} Y &= \frac{\nabla}{dt} Y(t) = (y_{,j}^k \dot{c}^j + \Gamma_{ij}^k y^i \dot{c}^j) X_k \end{aligned}$$

**Satz 3.3.3.** Für jede parametrisierte Kurve  $\gamma = X \circ c$  existiert zu jedem gegebenen Tangentialvektor  $Y_0$  in jedem beliebigen Punkt  $\gamma(t_0) = X \circ c(t_0)$  eindeutig ein Vektorfeld  $Y(t)$  längs  $\gamma$  mit Anfangsbedingung  $Y(t_0) = Y_0$ , das parallel längs  $\gamma$  ist.

*Beweis.*

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} Y = (\dot{y}^k(t) + y^i(t) \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k) X_k$$

Mit  $A_i^k = \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k$  ergibt sich

$$\dot{y}^k(t) = A_i^k(t) y^i$$

mit  $y^k(t_0) = y_0^k$ . Mit dem Satz von Picard-Lindelöf ist dieses Gleichungssystem lösbar und es existiert genau eine Lösung.  $\square$

**Korollar 3.3.4.** Ein paralleles Vektorfeld hat konstante Länge, das heißt  $\frac{d}{dt} g(Y(t), Y(t)) = 0$ . Insbesondere ist für eine Geodätische mit  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$  die Länge des Tangentialvektors notwendigerweise konstant.

$$\frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(Y(t), Y(t)) &= \frac{d}{dt} (Y(t) \cdot Y(t)) = \frac{d}{dt} Y(t) \cdot Y(t) + Y(t) \cdot \frac{d}{dt} Y(t) \\ &= 2 \frac{d}{dt} Y(t) \cdot Y(t) = 2g\left(\frac{d}{dt} Y(t), Y(t)\right) \\ &= 2g\left(\frac{\nabla}{dt} Y(t), Y(t)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$



**Bemerkung 3.3.5.** Seien  $Y(t), Z(t)$  zwei parallele Vektorfelder entlang  $\gamma(t) = X \circ c(t)$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt}g(Y(t), Z(t)) = 0$$

Damit bleibt auch der Winkel  $\alpha$  zwischen  $Y$  und  $Z$  konstant:

$$\cos \alpha = \frac{g(Y(t), Z(t))}{\sqrt{g(Y(t), Y(t))g(Z(t), Z(t))}}$$

**Satz 3.3.6.** Für jeden Punkt  $X(u_0)$  einer Fläche  $X$  und jeden Tangentialvektor  $Y_0$  in  $X(u_0)$  existiert ein  $\epsilon > 0$  und genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\gamma = X \circ c$  mit  $c(0) = u_0$ ,  $\gamma(0) = X \circ c(u_0)$  und  $\dot{\gamma} = Y_0$ , wobei  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ .

*Beweis.*  $0 = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = (\ddot{c}^k + \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k(c(t)))$  entspricht einem Gleichungssystem zweiter Ordnung. Mittels Picard-Lindelöf und durch Umschreiben auf ein System erster Ordnung ist dieses eindeutig lösbar.  $\square$

**Definition 3.3.7.** Sei  $Y(t)$  Einheitsvektorfeld,  $\|Y(t)\| = 1$ , längs parametrisierter Kurve  $\gamma(t) = X \circ c(t)$ . Da  $\dot{Y}(t)$  normal zu  $Y(t)$  ist, gilt

$$\frac{\nabla}{dt}Y(t) = P_{T_c X}\dot{Y} = \lambda N \times Y(t).$$

$\lambda = \lambda(t)$ , das wir als  $\left[\frac{\nabla}{dt}Y\right] = \lambda$  bezeichnen, heißt *algebraischer Wert* der kovarianten Ableitung von  $Y(t)$  in  $t$ .

$$\left[\frac{\nabla}{dt}Y\right] = \dot{Y} \cdot N \times Y$$

**Definition 3.3.8.** Sei  $\gamma(t) = X \circ c(t)$  nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der Wert

$$\left[\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma}\right] = \ddot{\gamma} \cdot N \times \dot{\gamma} =: \kappa_g(t)$$

heißt *geodätische Krümmung* von  $\gamma$ .

Es gilt

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

**Bemerkung 3.3.9.**  $\gamma$  ist Geodätische  $\Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \kappa_g = 0$

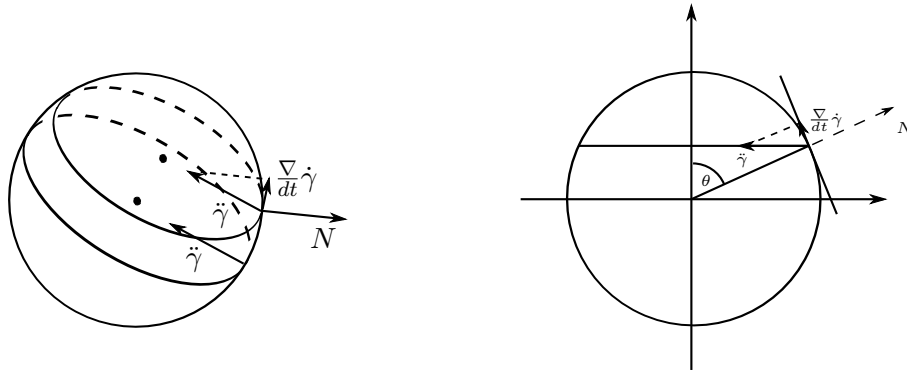
**Beispiel 3.3.10.** Wir wollen die geodätische Krümmung eines Breitenkreises auf der Einheitssphäre berechnen.

Es gilt die Formel

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

Wir wissen, dass  $\kappa_n$  nur von  $\dot{\gamma}$  abhängt:  $\kappa_n = k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ . Außerdem gilt  $\kappa^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta} &= 1 + \kappa_g^2 \\ \Leftrightarrow \kappa_g^2 &= 1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \kappa_g^2 &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta \end{aligned}$$

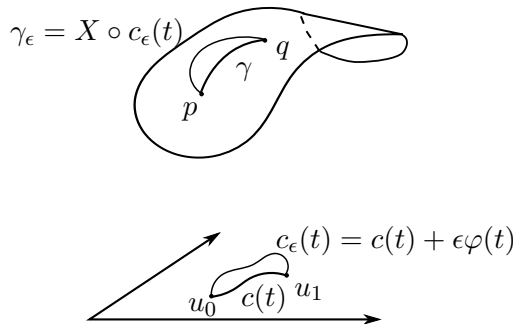


**Bemerkung 3.3.11** (Physikalische Interpretation). Sei  $\gamma(t) = X \circ c(t)$  eine Bewegung eines Massenpunktes. Dann ist  $\frac{\nabla^2}{dt^2} \dot{\gamma}$  der Beschleunigungsvektor auf einer Mannigfaltigkeit und  $\frac{\nabla^2}{dt^2} \dot{\gamma} = 0$  entspricht einer beschleunigungsfreien Bewegung.

In dem Sinne sind Geodätische die beschleunigungsfreien Bewegungen (Grundidee Einsteins).

**Satz 3.3.12.** Seien  $p = X(u_0)$  und  $q = X(u_1)$  feste Punkte auf einer Fläche  $X$ . Falls  $\gamma = X \circ c$  die kürzeste Verbindung der Punkte ist, dann ist  $\gamma$  Geodätische, das heißt nach Bogenlänge parametrisiert gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \text{ und } \kappa_g = 0.$$



*Beweis.*  $L(\gamma_\epsilon) = \int_0^L \sqrt{\dot{\gamma}_\epsilon \cdot \dot{\gamma}_\epsilon} dt = f(\epsilon)$  hat ein Minimum bei  $\epsilon = 0$ .

Mit  $\frac{d}{d\epsilon} \gamma_\epsilon = \frac{d}{d\epsilon} X \circ (c + \epsilon\varphi) = X_i \varphi^i \in T_c X$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} L(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \int_0^L \sqrt{\dot{\gamma}_\epsilon \cdot \dot{\gamma}_\epsilon} dt \\ &= \int_0^L \frac{\dot{\gamma}_\epsilon \cdot \frac{d}{d\epsilon} \dot{\gamma}_\epsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}_\epsilon \cdot \dot{\gamma}_\epsilon}} dt|_{\epsilon=0} = \int_0^L \dot{\gamma} \cdot \left( \frac{d}{dt} \frac{d}{d\epsilon} \dot{\gamma} \right) |_{\epsilon=0} dt \\ &= - \int_0^L \ddot{\gamma} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \gamma_\epsilon dt = - \int_0^L \ddot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i(t) dt = \int_0^L \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i dt \\ &= \int_0^L \kappa_g(t) N \times \dot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i(t) dt = \int_0^L \kappa_g(t) f(t) dt \end{aligned}$$

Da  $\varphi^i$  beliebig, gilt

$$\int_0^L \kappa_g(t) f(t) dt = 0 \quad \forall f(t) \in C^\infty((0, L))$$

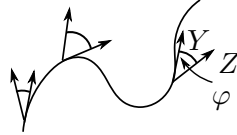
$$\Rightarrow \kappa_g = 0$$

□

**Satz 3.3.13.** Seien  $Y(t), Z(t)$  zwei Vektorfelder entlang  $\gamma$  mit  $g(Y, Y) = g(Z, Z) = 1$ . Dann gilt

$$\left[ \frac{\nabla}{dt} Y \right] - \left[ \frac{\nabla}{dt} Z \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

wobei  $\varphi(t)$  der Winkel zwischen  $Y(t)$  und  $Z(t)$  ist.



*Beweis.* Sei  $\tilde{Y}(t) = N \times Y(t)$  und  $\tilde{Z}(t) = N \times Z(t)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} Z(t) &= (\cos \varphi(t))Y(t) + (\sin \varphi(t))\tilde{Y}(t), \\ \tilde{Z}(t) &= N \times Z(t) = (\cos \varphi(t))N \times Y(t) + (\sin \varphi(t))N \times \tilde{Y}(t) \\ &= (\cos \varphi(t))\tilde{Y}(t) - (\sin \varphi(t))Y(t)\dot{Z}(t) \\ \dot{Z}(t) &= -(\sin \varphi(t))\dot{\varphi}(t) + (\cos \varphi(t))\dot{Y}(t) + (\cos \varphi(t))\dot{\varphi}(t)\tilde{Y}(t) + (\sin \varphi(t))\dot{\tilde{Y}}(t) \end{aligned}$$

Mit  $Y \cdot \tilde{Y} = 0 = Y \cdot \dot{Y}$  folgt

$$\begin{aligned} \dot{Z} \cdot \tilde{Z} &= (\sin^2 \varphi)\dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi)\dot{Y} \cdot \tilde{Y} + (\cos^2 \varphi)\dot{\varphi} - (\sin^2 \varphi)\dot{\tilde{Y}} \cdot Y \\ &= \dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi)\dot{Y} \cdot \tilde{Y} - (\sin^2 \varphi)\dot{\tilde{Y}} \cdot Y. \end{aligned}$$

Da  $Y \cdot \tilde{Y} = 0$  folgt  $\dot{Y} \cdot \tilde{Y} = -Y \cdot \dot{\tilde{Y}}$  und damit ergibt sich

$$\dot{Z} \cdot \tilde{Z} = \dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\dot{Y} \cdot \tilde{Y}) = \dot{\varphi} + \dot{Y} \cdot \tilde{Y}.$$

Da

$$\dot{Z} \cdot \tilde{Z} = \frac{dZ}{dt} \cdot \tilde{Z} = \left[ \frac{\nabla Z}{dt} \right] N \times Z \cdot \tilde{Z} = \left[ \frac{\nabla Z}{dt} \right]$$

können wir schließen

$$\left[ \frac{\nabla Z}{dt} \right] = \dot{Z} \cdot \tilde{Z} \dot{\varphi} + \dot{Y} \cdot \tilde{Y} = \frac{d\varphi}{dt} + \left[ \frac{\nabla Y}{dt} \right].$$

□

**Korollar 3.3.14.** Sei  $\gamma(t) = X \circ c(t)$  nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $Y(t)$  paralleles Vektorfeld entlang  $\gamma(t)$ . Sei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $Y$  und  $\dot{\gamma}$ . Dann gilt

$$\kappa_g(t) = \left[ \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \right] = \dot{\varphi}.$$

Die geodätische Krümmung ist also die Änderung des Winkels, den die Tangente an die Kurve mit einer parallelen Richtung längs der Kurve bildet.

**Bemerkung 3.3.15.** Im Falle der Ebene ist die parallele Richtung fest und  $\kappa_g$  reduziert sich zu  $\kappa$ .

**Theorem 3.3.16** (Theorema Egregium). Die Gauß-Krümmung einer parametrisierten Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  hängt nur von der ersten Fundamentalform  $g_{ij}$  ab. Das heißt,  $G$  ist eine Größe der inneren Geometrie.

**Beispiel 3.3.17.** Sei  $X(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$  die Sphäre und sei  $\gamma = X \circ c$  definiert durch

$$c(t) = \left( \theta, \frac{t}{\sin(\theta)} \right).$$

a) Wir berechnen die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$  der Sphäre.

Es ist

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

und

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (g^{lk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

mit  $\theta \in (0, \pi)$ . Also

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\varphi}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\theta}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\varphi}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\varphi}) = -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\varphi}) = 0 \end{aligned}$$

- b) Wir verschieben nun  $Y(0) = (0, 1, 0) = \frac{1}{\sin(\theta)} X_\varphi \circ c(0)$  parallel um  $\gamma$ . Wir stellen  $Y(t)$  in der Basis  $X_\theta, X_\varphi$  dar:

$$Y(t) = y^\theta(t) X_\theta \circ c(t) + y^\varphi(t) X_\varphi \circ c(t).$$

Parallelverschieben heisst dann, die Gleichung

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) = (\dot{y}^k(t) + \Gamma_{ij}^k y^i(t) \dot{c}^j(t)) X_k$$

zu lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\dot{y}^k(t) + \Gamma_{ij}^k y^i(t) \dot{c}^j(t) = 0, \quad k = \theta, \varphi.$$

Setzen wir  $\begin{pmatrix} \dot{c}^\theta \\ \dot{c}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}$  und die Christoffel-Symbole aus der 1. Teilaufgabe ein, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^\theta \\ y^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) \\ -\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^\theta \\ y^\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} y^\theta(t) \\ y^\varphi(t) \end{pmatrix} = \exp(Mt) \begin{pmatrix} y^\theta(0) \\ y^\varphi(0) \end{pmatrix} = \exp(Mt) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix},$$

wobei

$$M = \cos(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sin^2(\theta)} & 0 \end{pmatrix}.$$

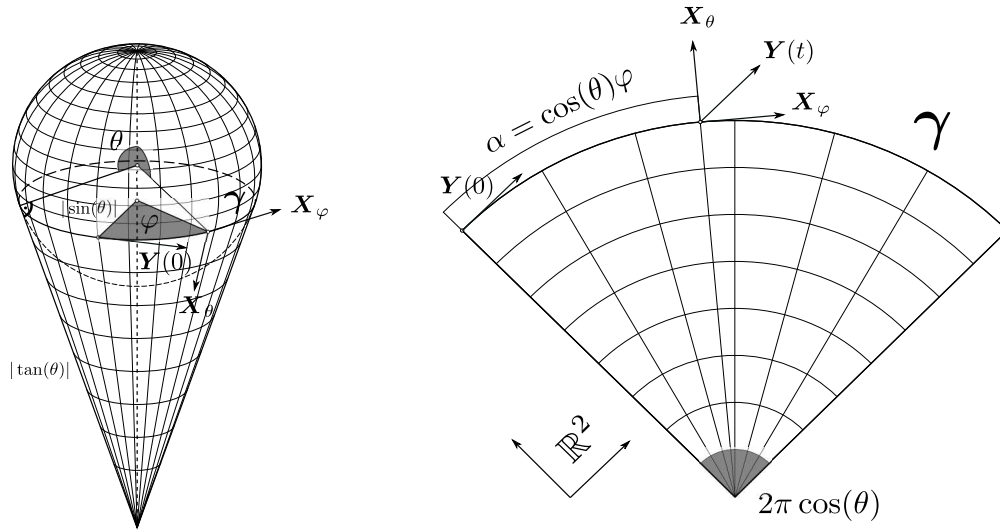
Um  $\exp(Mt)$  auszurechnen untersuchen wir die Matrix  $M$  und stellen fest, dass  $M^2 = -\cot^2(\theta)1$ . Dies reicht schon um die Exponentialreihe auszurechnen, indem wir in gerade und ungerade Exponenten zerlegen:

$$\begin{aligned} \exp(Mt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Mt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (Mt)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (Mt)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (M^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} M (M^2)^n \\ &= 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cot(\theta)t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n + \frac{M}{\cot(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cot(\theta)t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 1 \cos(\cot(\theta)t) + M \tan(\theta) \sin(\cot(\theta)t). \end{aligned}$$

Dementsprechend erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y^\theta(t) \\ y^\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\cot(\theta)t) \\ \frac{\cos(\cot(\theta)t)}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}.$$

- c) Wir rollen den Schmiegekegel auf  $\mathbb{R}^2$  ab.



Im folgenden stehen die Vektoren  $Y(t)$ ,  $X_\theta$  und  $X_\varphi$  für die Bilder der zugehörigen Vektoren unter der Abbildung (Isometrie), die den Kegel abrollt. Wir wählen ein Koordinatensystem, in welchem  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . In  $\mathbb{R}^2$  ist Parallelverschieben trivial und wir erhalten  $Y(t) = Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Um mit der letzten Teilaufgabe zu vergleichen, müssen wir  $Y(t)$  wieder in der Basis  $X_\theta \circ c(t)$ ,  $X_\varphi \circ c(t)$  ausdrücken.

In unserem Koordinatensystem gilt

$$X_\varphi = \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad X_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha = \cos(\theta)\varphi$  der Winkel in  $\mathbb{R}^2$  ist und  $\varphi$  mit  $t$  über  $c(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}$  zusammenhängt, d.h. insgesamt  $\alpha(t) = \cot(\theta)t$ . Wir erhalten

$$Y(t) = \langle Y(t), X_\theta \rangle X_\theta + \langle Y(t), \frac{X_\varphi}{\sin(\theta)} \rangle \frac{X_\varphi}{\sin(\theta)} = \sin(\alpha(t)) X_\theta + \frac{\cos(\alpha(t))}{\sin(\theta)} X_\varphi,$$

was mit der letzten Teilaufgabe übereinstimmt.

d)

$\gamma$  ist Geodäte

$$\Leftrightarrow 0 = \nabla_\gamma \dot{\gamma} = (\Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j + \ddot{c}^k) X_k$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j + \ddot{c}^k = 0.$$

Einsetzen von  $\Gamma_{ij}^k$  und  $c^i$  liefert

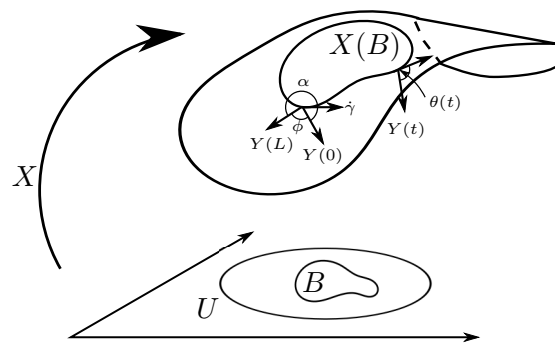
$$0 = \cot(\theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

### 3.4 Das Gauß-Bonnet Theorem

Als eines der berühmtesten Theoreme der Mathematik verknüpft das Gauß-Bonnet Theorem geometrische und topologische Eigenschaften von Flächen.

**Theorem 3.4.1** (Die Gauß-Bonnet Formel). *Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung  $G$ ,  $B \subset U$ , und  $\gamma = X \circ c$  der glatte Rand von  $X(B)$ , wobei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine einfach geschlossene Kurve in  $U$  ist. Sei  $\kappa_g(t)$  die geodätische Krümmung von  $\gamma$ . Dann gilt*

$$\int_{X(B)} G + \int_{\partial X(B)} \kappa_g = 2\pi$$



**Folgerung 3.4.2.** *Sei  $Y$  ein paralleles Vektorfeld entlang  $\gamma$  und  $\theta$  der Winkel zwischen  $Y$  und  $\dot{\gamma}$ . Dann gilt nach Korollar 3.3.14  $\dot{\theta}(t) = \kappa_g$  und mit  $\gamma(L) = \gamma(0)$  folgt*

$$\int_{\gamma} \kappa_g = \int_0^L \dot{\theta}(s) ds = \theta(L) - \theta(0) = \phi$$

Nach Gauß-Bonnet folgt:

$$\int_R G = 2\pi - \phi$$

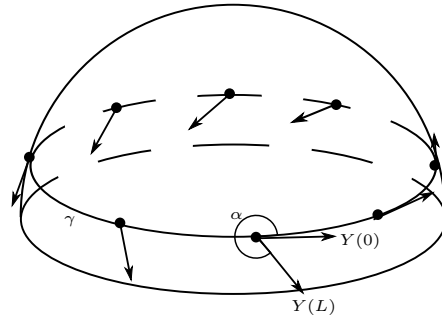
**Definition 3.4.3.** Wir definieren den Defektwinkel  $\alpha$ :

$$\int_R G = 2\pi - \phi = \alpha$$

**Beispiel 3.4.4.** Für einen Kreis gilt  $0 = \int_R G = 2\pi - \phi$ , also  $\phi = 2\pi$  und  $\alpha = 0$ .

Für die obere Hälfte der Einheitssphäre bekommen wir  $2\pi = \int_R G = 2\pi - \phi$ , also  $\phi = 0$  und  $\alpha = 2\pi$ .

**Bemerkung 3.4.5.** Allgemein entspricht  $G(u)$  dem Netto-Betrag, um den sich ein Vektor dreht wenn er parallel transportiert wird.

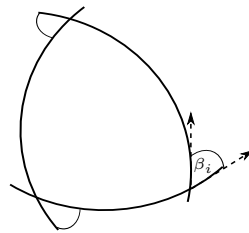


**Bemerkung 3.4.6.** Für die Gauß-Krümmung und Defektwinkel eines Polyeders gilt

$$G = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.$$

**Korollar 3.4.7.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung  $G$  und  $c$  der stückweise glatte Rand von  $B \subset U \subset \mathbb{R}^2$ . Seien  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Außenwinkel der endlich vielen Ecken von  $\gamma(t) = X \circ c(t)$ . Dann gilt

$$\int_{X(B)} G + \int_{\partial X(B)} \kappa_g + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi$$



**Korollar 3.4.8.** Sei  $B$  wie oben, nur mit Rand  $c$  aus endlich vielen Stücken von Geodätischen. Dann gilt

$$\int_{X(B)} G + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi.$$

**Theorem 3.4.9** (Theorem Elegantissimum (Gauß 1827)). Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung  $G$  und  $A$  ein geodätisches Dreieck auf  $X$  mit Innenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Dann gilt:

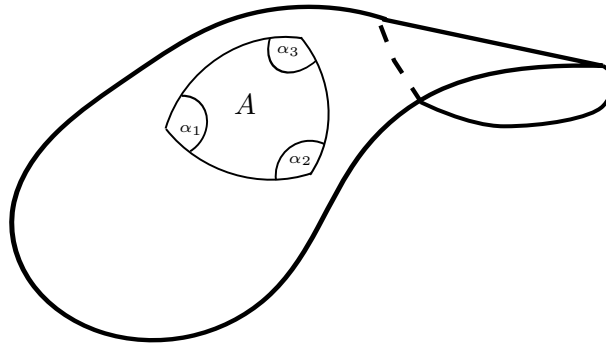
$$\int_A G = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Für eine Folge schrumpfender geodätischer Dreiecke gilt damit

$$G(u) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{|A|}.$$

Es folgt:





$$G > 0: \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$$

$$G = 0: \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

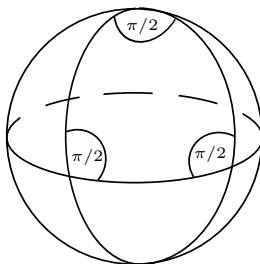
$$G < 0: \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_A G + \sum_{i=1}^3 \beta_i &= 2\pi \\ \Leftrightarrow \int_A G &= \sum_{i=1}^3 (\pi - \beta_i) - \pi \\ \Leftrightarrow \int_A G &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi \end{aligned}$$

□

**Beispiel 3.4.10.**



Für ein geodätisches Dreieck auf der Einheitssphäre gilt:

$$\begin{aligned} \int 1 &= A = \frac{\pi}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \pi + A = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

*Beweis.* [Gauß-Bonnet] Zu zeigen:

$$\int_R 1 + \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi$$

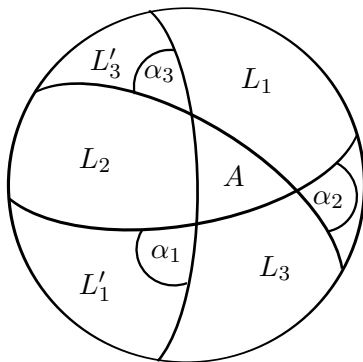
Wir unterteilen den Beweis in vier Schritte und zeigen die Aussage zunächst für geschlossene Kurven auf der Einheitssphäre.

1.Schritt: Einheitssphäre

Für jedes geodätisches Dreieck mit Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  gilt das Theorem elegantissimum auf der Sphäre (Thomas Harriot, 1603):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A$$

Denn es gilt



$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^3 L_i + \cup_{i=1}^3 L'_i| &= 4\pi \\ \Rightarrow |\cup_{i=1}^3 L_i| &= 2\pi \\ \Rightarrow |L_1| + |L_2| + |L_3| - 2A &= 2\pi \end{aligned}$$

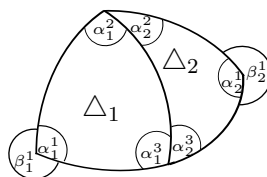
Offensichtlich hängen die  $L_i$  nur von der Größe des Winkels  $\alpha_i$  ab und falls  $\alpha_i = \pi$  folgt  $|L_i| = 2\pi$ . Damit ergibt sich

$$|L_i| = 2\alpha_i$$

und mit oben folgt

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2A &= 2\pi \\ A &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \end{aligned}$$

2.Schritt: geodätisches Polygon



Jedes geodätische Polygon  $P$  auf der Einheitssphäre kann in geodätische Dreiecke zerlegt werden. Damit gilt:

$$\int_P dA = \sum \int_{\Delta_i} dA.$$

Wir betrachten zunächst ein geodätisches Viereck mit Zerlegung in zwei geodätische Dreiecke. Für ein solches Dreieck gilt  $\int_{\Delta} dA = \sum_i (\alpha_i - \pi) + 2\pi = 2\pi - \sum_i \beta_i$  und damit

$$4\pi = \int_{\Delta_1} dA + \int_{\Delta_2} dA + \sum_{i=1}^3 \beta_1^i + \sum_{i=1}^3 \beta_2^i$$

Es folgt mit  $\tilde{\alpha}_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$  und  $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1 + \Delta_2} dA + \beta_1^1 + \beta_2^1 &= \sum_{i=2}^3 (\pi - \beta_1^i) + \sum_{i=2}^3 (\pi - \beta_2^i) \\ &= (\tilde{\alpha}_3 - \pi) + (\tilde{\alpha}_2 - \pi) + 2\pi \\ &= \int_{\Delta_1 + \Delta_2} dA + \sum_{i=1}^4 \tilde{\beta}_i = 2\pi \end{aligned}$$

Induktiv folgt für beliebige Polygone

$$\int_P dA + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi.$$

3.Schritt:

$\int_R dA$  und  $\int_{\partial R} \kappa_g$  lassen sich beliebig genau approximieren indem wir die Randkurve  $\partial R$  durch ein geodätisches Polygon ersetzen. Damit gilt für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$ , dass wir ein Polygon  $P_\varepsilon$  finden, sodass

$$\begin{aligned} \int_R dA + \int_{\partial R} \kappa_g &= \varepsilon + \int_{P_\varepsilon} dA + \sum \beta_i \\ &= \varepsilon + 2\pi \end{aligned}$$

Somit haben wir Gauß-Bonnet für die Einheitssphäre bewiesen.

4.Schritt:

Jetzt betrachten wir eine allgemeine Fläche und beweisen die Gauß-Bonnet Formel mittels der Gauß-Abbildung auf die Einheitssphäre. Dabei erinnern wir uns, dass die Gauß-Krümmung die Jakobi-Determinante der Gauß-Abbildung ist.

Sei  $G > 0$ , ansonsten müssen wir in Gebiete unterteilen. (Falls  $G$  das Vorzeichen wechselt, muss man  $N$  zerlegen und algebraische Flächen verwenden)

Unter Anwendung der Transformationsformel fuer Integrale schließen wir

$$\int_{R'} 1 = \int_{N(R)} 1 = \int_R \det(dN) = \int_R G$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Integral über der geodätischen Krümmung der Randkurve das gleiche ist wie das Integral über die zugehörige Kurve  $N \circ \gamma$  auf der Einheitssphäre.

Dazu verwenden wir, dass das Integral über die geodätische Krümmung dem Winkel gleicht zwischen dem Anfangs- und dem Endwert eines paralleltransportierten Vektorfeldes  $Y$ , also  $\phi = \langle Y(0), Y(L) \rangle$  (siehe Folgerung 3.4.2)

Für ein paralleles Vektorfeld  $Y(t)$  an  $\gamma$  gilt  $\dot{Y}(t) \parallel N$ . Da  $N$  auf Fläche und Sphäre übereinstimmen, gilt selbiges für die Tangentialebenen. Damit bleibt auch die Parallelität erhalten und es gilt für den Winkeln  $\phi$  und  $\phi'$  auf  $N \circ \gamma$

$$\phi = \int_\gamma \kappa_g = \int_{\gamma'} \kappa_g = \phi'$$

Damit ist der Satz von Gauß-Bonnet bewiesen.  $\square$

**Definition 3.4.11.** Sei  $M$  eine geschlossene Fläche in  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $T(M)$  eine Triangulierung von  $M$ . Dann nennt man

$$\chi(T(M)) := E - K + F$$

die *Euler-Charakteristik*, mit

$E$  = Anzahl der Ecken

$K$  = Anzahl der Kanten

$R$  = Anzahl der Flächen.

Wir betrachten nun eine geschlossene zweidimensionale Fläche, oder zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Eine Mannigfaltigkeit wird beschrieben von einer parametrisierten Fläche. In der Differentialgeometrie wird  $M$  durch einen Atlas mit zugehörigen Karten  $\phi_1 = X_2^{-1}, \phi_2 = X_1^{-1}$  beschrieben, wobei  $X_1, X_2$  zugehörige Parametrisierungen in unserem Sinne sind (siehe Bemerkung 3.5.6)

**Theorem 3.4.12.** Sei  $M$  eine geschlossene zweidimensionale Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ,  $T(M)$  eine Triangulierung von  $M$ , dann gilt

$$\int_M G = 2\pi\chi(T(M))$$

*Beweis.* Sei  $T(M)$  Triangulierung. Für ein Dreieck  $\Delta_i$ , bei dem der Rand in positivem Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird, gilt nach Korollar 3.4.7

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_i} G &= - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g - \sum_{n=1}^3 \beta_i^n + 2\pi = - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{n=1}^3 (\pi - \beta_i^n) - \pi \\ &= - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{n=1}^3 \alpha_i^n - \pi, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_i^n$  die  $n$ -ten Innenwinkel des  $i$ -ten Dreiecks bezeichnet.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M G &= \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} G = - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k - \sum_{i=1}^n \pi \\ &= 0 + 2\pi E - \pi F \end{aligned}$$

Alle Randkurven werden genau zweimal in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, sodass sich die jeweiligen Terme aufheben. Mit  $2K = 3F$  folgt

$$\begin{aligned} \int_M G &= 2\pi\left(E - \frac{F}{2}\right) = 2\pi\left(E - \frac{3}{2}F + F\right) \\ &= 2\pi(E - K + F) = 2\pi\chi(T(M)) \end{aligned}$$

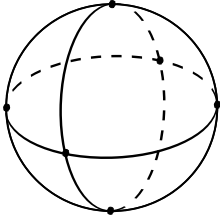
$\square$

**Bemerkung 3.4.13.** Da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von der Triangulierung ist, ist es auch die Euler-Charakteristik und es gilt

$$\int_M G = 2\pi\chi(M).$$

**Bemerkung 3.4.14.**  $\chi(M)$  ist sogar eine topologische Invariante, das heißt invariant unter stetigen Deformationen, also unter homöomorphen Abbildungen. Somit auch jeglicher Polyeder.

**Beispiel 3.4.15.**



$$\text{Sphäre: } \chi(S) = 6 - 12 + 8 = 2$$

**Bemerkung 3.4.16.** Verfeinert man einen Polyeder  $M$  durch Hinzunahme einer Ecke zu einem neuen Polyeder  $\tilde{M}$ , dann ändert sich die Euler-Charakteristik nicht:

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M)$$

*Beweis.* Für Ecken, Kanten und Flächen gilt

$$E(\tilde{M}) = E(M) + 1$$

$$K(\tilde{M}) = K(M) + 3$$

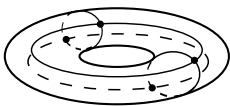
$$F(\tilde{M}) = F(M) + 2.$$

Weiter gilt

$$F - K = \tilde{F} - \tilde{K},$$

da gleich viele Flächen wie Kanten dazu kommen. Also folgt  $\chi(\tilde{M}) = \chi(M)$ . □

**Beispiel 3.4.17.**



$$\text{Torus: } \chi(T) = 4 - 8 + 4 = 0$$

**Definition 3.4.18.** Unter einer Fläche  $M$  vom *Geschlecht*  $g$  versteht man eine Fläche, die aus  $S^2$  durch Anfügen von  $g \geq 0$  Henkeln entsteht. Für die Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  gilt dann

$$\chi(M) = 2 - 2g$$



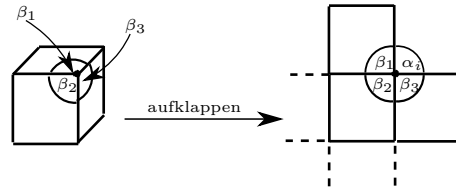
$$2\text{-Torus: } \chi(M) = (\chi(T) - 1) + (\chi(T) - 1) = -2$$

**Bemerkung 3.4.19.** Die Formel  $\chi(M) = 2 - 2g$  gilt auch für einen Polyeder mit  $E$  Ecken,  $K$  Kanten und  $F$  Flächen.

**Definition 3.4.20.** Sei  $P$  ein Polyeder, sei  $i$  eine Ecke von  $P$ . Seien  $\beta_1, \dots, \beta_n$  die Innenwinkel in der Ecke  $i$  all jener Polygone von  $P$ , die  $i$  als Ecke haben. Dann heißt

$$\alpha_i := 2\pi - \sum_{j=1}^n \beta_j$$

der Defektwinkel von  $P$  in  $i$ .



**Theorem 3.4.21** (Gauß-Bonnet für Polyeder). Sei  $P$  ein Polyeder mit Defektwinkeln  $\alpha_i$ . Dann gilt

$$\sum \alpha_i(P) = 2\pi\chi(P)$$

*Beweis.* Es reicht, einen Polyeder aus Dreiecken zu betrachten.

Sei  $\alpha_i = 2\pi - \sum_n \varphi_i^n$ , wobei  $\varphi_i^n$  die  $i$ -ten Innenwinkel des  $n$ -ten Dreiecks bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i(P) &= \sum_{i=1}^n (2\pi - \sum_n \varphi_i^n) \\ &= E(P)2\pi - \sum_i \sum_n \varphi_i^n = 2\pi(E - \frac{F}{2}) \\ &= 2\pi\chi(P). \end{aligned}$$

□

### 3.5 Riemannscher Krümmungstensor

**Erinnerung 3.5.1.** Für eine parametrisierte Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  gelten die Ableitungsgleichungen (3.2.7.)

$$\text{i) } X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + k_{ij} N$$

$$\text{ii) } N_i = -k_i^k X_k$$

wobei  $k_{ij} = k(X_i, X_j)$  die zweite Fundamentalform von  $X$  ist und  $k_{ij} = k_i^l g_{lj}$ .

**Satz 3.5.2** (Integrabilitätsbedingungen).

i) Gauß-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^s + (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s) = (k_{ij} k_{km} - k_{ik} k_{jm}) g^{ms} \quad \forall i, j, k, s$$

ii) Codazzi-Mainardi-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u^k} k_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j} k_{ik} + \left( \Gamma_{ij}^r k_{rk} - \Gamma_{ik}^r k_{rj} \right) = 0 \quad \forall i, j, k$$

*Beweis.* Nach dem Satz von Schwarz gilt  $X_{ijk} = X_{ikj}$ . Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} 0 &= X_{ijk} - X_{ikj} = \frac{\partial}{\partial u^k} X_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j} X_{ik} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^s X_s + k_{ij} N) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{ik}^s X_s + k_{ik} N) \\ &= \Gamma_{ij,k}^s X_s - \Gamma_{ik,j}^s X_s + \Gamma_{ij}^r X_{rk} - \Gamma_{ik}^r X_{rj} + k_{ij,k} N - k_{ik,j} N - k_{ij} k_k^s X_s + k_{ik} k_j^s X_s \\ &= (\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s) X_s + \Gamma_{ij}^r (\Gamma_{rk}^s X_s + k_{rk} N) - \Gamma_{ik}^r (\Gamma_{rj}^s X_s + k_{rj} N) + (k_{ij,k} - k_{ik,j}) N \\ &\quad + (-k_{ij} k_k^s + k_{ik} k_j^s) X_s \\ &= X_s (\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - k_{ij} k_k^s + k_{ik} k_j^s) + N (k_{ij,k} - k_{ik,j} + \Gamma_{ij}^r k_{rk} - \Gamma_{ik}^r k_{rj}) \end{aligned}$$

Da  $X_s \perp N$  müssen die beiden Terme in Klammern verschwinden, und wir erhalten die Aussage des Satzes.  $\square$

**Definition 3.5.3.** Die linke Seite der Gauß-Gleichung heißt auch *Riemannscher Krümmungstensor* und wird mit  $R_{ikj}^s$  bezeichnet.

$$R_{ikj}^s = \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^s + \left( \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s \right)$$

Damit sind wir nun in der Lage das Theorema Egregium 3.3.16 zu beweisen. Es sei erinnert, dass das Theorema Egregium aussagt, dass die Gauß-Krümmung  $G$  eine Größe der inneren Geometrie ist, also nur von den  $g_{ij}$  abhängt.

*Beweis.* [Theorema Egregium] Setze  $i = j = 1, k = 2$ .

$$\begin{aligned} R_{121}^s &= g^{sm} (k_{11} k_{2m} - k_{12} k_{1m}) \quad | g_{2s} \\ g_{2s} R_{121}^s &= R_{2121} = g_{2s} g^{sm} (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{12}) \\ &= \det(k_{ij}) = \det(k_i^m g_{mj}) = \det(k_i^m) \det(g_{mj}) \\ \Rightarrow R_{2121} &= G \det(g_{ij}) \\ \Rightarrow G &= \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})} \end{aligned}$$

Also hängen die  $R_{ikj}^s$  nur von den  $\Gamma_{ij}^k$  ab, welche wiederum nur von den  $g_{ij}$  abhängen. Also ist  $G$  eine Funktion von  $g_{ij}$  und damit eine Größe der inneren Geometrie.  $\square$

**Folgerung 3.5.4.** Für die Gauß-Krümmung  $G$  einer parametrisierten Fläche gilt also

$$G = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})} = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}.$$

**Satz 3.5.5.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Für den Riemannschen Krümmungstensor gelten die folgenden Gleichungen:

i)  $[\nabla_k, \nabla_j]X_i = R_{ikj}^s X_s$

ii)  $g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j]X_i) = R_{likj}$

wobei  $[\nabla_k, \nabla_j] = (\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k)$ .

*Beweis.*

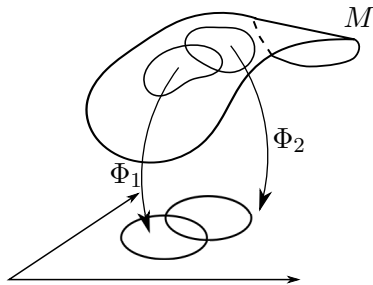
$$\begin{aligned} [\nabla_k, \nabla_j]X_i &= (\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k)X_i = \nabla_k(\nabla_j X_i) - \nabla_j(\nabla_k X_i) \\ &= \nabla_k[\Gamma_{ji}^r X_r] - \nabla_j[\Gamma_{ki}^r X_r] \\ &= \Gamma_{ji,k}^s X_s + \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^s X_s - \Gamma_{ki,j}^s X_s - \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^s X_s \\ &= R_{ikj}^s X_s \end{aligned}$$

Damit und mit der Linearität von  $g$  folgt

$$g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j]X_i) = g(X_l, R_{ikj}^s X_s) = R_{ikj}^s g(X_l, X_s) = g_{ls} R_{ikj}^s = R_{likj}$$

□

**Bemerkung 3.5.6.** In der Riemannschen Geometrie, also in der Geometrie, die eine Mannigfaltigkeit  $M$  und eine Metrik  $(M, g_{ij})$  vorgibt, wird dies als Definition für den Riemannstensor verwendet. Dort werden die Basiselemente mit  $\delta_j$  statt  $X_j$  bezeichnet, was aber dasselbe ist.



$\Phi$  Karte,  
 $\Phi_1^{-1} = X_1, \Phi_2^{-1} = X_2$  Parametrisierungen  
 $\delta_j = X_j,$   
 $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$  glatte Abbildung,  
 $(\cup \Phi_i)$  Atlas

Hier wird  $M$  nicht als eingebettete Fläche angesehen, sondern wir stellen uns als Flachländer vor, die nur Längen und Winkeln messen können.

Riemannsche Geometrie:  $g_{ij}$  positiv definit

Lorentzsche Geometrie:  $g_{ij}$  indefinit.

Länge von Licht = 0.

Die Definition der kovarianten Ableitung, als auch die der Geodäten, bleibt dieselbe, denn dort kommen nur  $g_{ij}$  vor.

**Bemerkung 3.5.7.** Es wird auch der Ausdruck

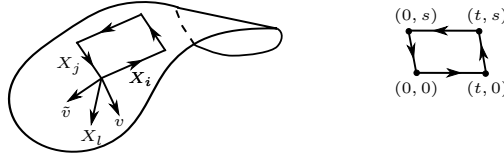
$$R(X_k, X_j)X_i := [\nabla_k, \nabla_j]X_i$$



verwendet, und es gilt dann mit der Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} R(X_k, X_j)X_i &= (k_{ij}k_k^s - k_{ik}k_j^s)X_s \\ &= k(X_i, X_j)LX_k - k(X_i, X_k)LX_j \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.5.8** (Geometrische Interpretation).



Der Vektor  $\tilde{v}$  entspricht dem um ein Parallelogramm herum parallelverschobenen Vektor  $v$ . Mit  $\delta v$  bezeichnen wir den Unterschied von  $v$  und  $\tilde{v}$ .

$$\begin{aligned} \delta g(v, X_l) &= g(v, X_l)(t, 0) - g(v, X_l)(0, 0) + g(v, X_l)(t, s) - g(v, X_l)(t, 0) \\ &\quad + g(v, X_l)(0, s) - g(v, X_l)(t, s) + g(v, X_l)(0, 0) - g(v, X_l)(0, s) \\ &= tg(v, \nabla_i X_l)\left(\frac{t}{2}, 0\right) + sg(v, \nabla_j X_l)\left(t, \frac{s}{2}\right) - tg(v, \nabla_i X_l)\left(\frac{t}{2}, s\right) - sg(v, \nabla_j X_l)\left(0, \frac{s}{2}\right) \\ &= stg(v, \nabla_i \nabla_j X_l) - stg(v, \nabla_j \nabla_i X_l) \\ &= stg(v, (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)X_l) = tsg(v, [\nabla_i, \nabla_j]X_l) \\ &= stv^k g(X_k, [\nabla_i, \nabla_j]X_l) = stv^k R_{kl ij}, \end{aligned}$$

wobei wir Terme höherer Ordnung in  $s$  und  $t$  vernachlässigt haben.

$$\begin{aligned} \delta g(v, X_l) &= \delta g(v^k X_k, X_l) = \delta v^k g_{kl} = stv^k R_{kl ij} \quad | g^{ln} \\ \delta v^n &= stv^k R_{kij}^n = R_{kij}^n \end{aligned}$$

Allgemein geben die  $R_{kij}^n$  die  $n$ -te Komponente der Änderung des Vektors  $X_k$  an, wenn er um ein Parallelogramm, das von  $X_i$  und  $X_j$  aufgespannt wird, parallel verschoben wird.

**Bemerkung 3.5.9.** Im Zweidimensionalen gibt es nur  $X_1, X_2$ .

**Satz 3.5.10.** Für eine parametrisierte Flächen  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$i) R_{likj} = G(u)(g_{ij}g_{kl} - g_{jk}g_{il})$$

$$ii) R_{ikj}^l = G(u)(g_{ij}\delta_k^l - g_{jk}\delta_i^l)$$

*Beweis.* Sei  $R(X_l, X_i, X_k, X_j)$  folgendermaßen definiert

$$R(X_l, X_i, X_k, X_j) = R_{likj} = g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j]X_i)$$

Es gilt:

$$a) R(X_l, X_i, X_k, X_j) = -R(X_l, X_i, X_j, X_k)$$

$$b) R(X_l, X_i, X_k, X_j) = -R(X_i, X_l, X_k, X_j)$$

Die erste Gleichung gilt, da  $[\nabla_k, \nabla_j] = -[\nabla_j, \nabla_k]$  ist.

Die zweite, da

$$\begin{aligned} R(X_i, X_l, X_k, X_j) &= g(X_i, [\nabla_k, \nabla_j]X_l) = g([\nabla_j, \nabla_k]X_i, X_l) \\ &= g(X_l, [\nabla_j, \nabla_k]X_i) = -g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j]X_i) \\ &= -R(X_l, X_i, X_k, X_j) \end{aligned}$$

Bemerke, dass für  $\tilde{R}(X_l, X_i, X_k, X_j) = G(u)(g(X_i, X_j)g(X_k, X_l) - g(X_k, X_i)g(X_i, X_l))$  auch a) und b) gilt. Da

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \tilde{R}(X_1, X_2, X_1, X_2) = G \det g_{ij}$$

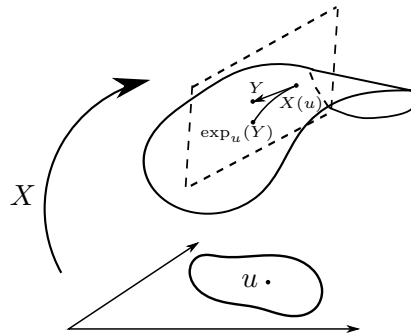
folgt die Behauptung. □

### 3.6 Exponentialabbildung

**Definition 3.6.1.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $u \in U$ . Sei  $T_u X$  die Tangentialebene an  $X$  in  $u$ . Wir definieren die *Exponentialabbildung*

$$\begin{aligned} \exp_u(Y) &: T_u X \rightarrow X(U) \\ \exp_u(Y) &:= \gamma(1, Y), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma(t, Y)$  die Geodätische bezeichnet mit  $\gamma(0, Y) = X(u)$  und  $\dot{\gamma}(0, Y) = Y$ .



**Lemma 3.6.2.** *Es existiert  $B_\varepsilon(0) \subset T_u X$ , sodass  $\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow T_u X$  eine glatte Abbildung ist.*

*Beweis.* Sei  $Y \in T_u X$ . Wir wissen, dass es  $\delta(Y) > 0$  gibt, welches von  $Y$  abhängt, sodass  $\gamma(t, Y)$  in  $(-\delta(Y), \delta(Y))$  definiert ist.

Es gilt  $\gamma(t, \lambda Y) = \gamma(\lambda t, Y)$ , wegen

$$\frac{d}{dt} \gamma(\lambda t, Y)|_{t=0} = \lambda \dot{\gamma}(\lambda t, Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma(t, \lambda Y)|_{t=0} = \lambda Y$$

und der Eindeutigkeit der Geodäten. Damit ergibt sich

$$\gamma(1, \lambda Y) = \gamma(\lambda, Y).$$

Man betrachtet nun

$$\varepsilon = \bigcap_{\|Y\|=1} \delta(Y).$$

Somit ist

$$\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow T_u X$$

wohldefiniert. Der Satz über die Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten stellt sicher, dass

$$\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow X(U)$$

eine glatte Abbildung ist. □

**Bemerkung 3.6.3.** Es gilt

$$\exp_u(v) = \gamma(1, v) = \gamma(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}).$$

Dies entspricht folgender anschaulichen Vorstellung: Man nimmt eine Schnur der Länge  $\|v\|$  und legt sie so auf die Fläche, dass sie in Richtung  $\frac{v}{\|v\|}$  auf die Geodäte zu liegen kommt.

Für

$$v = r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2)$$

ist  $\exp_u(v) = \exp_u(r, \varphi)$  die geodätischen Polarkoordinaten.

**Lemma 3.6.4.** Die Abbildung  $\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow X(U)$  ist ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung  $V \subset B_\varepsilon$  des Ursprungs  $0$  von  $T_u X$ .

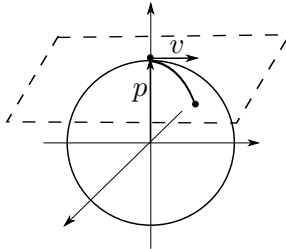
*Beweis.* Wir zeigen, dass  $d \exp_u$  nicht singulär ist an der Stelle  $0 \in T_u X$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (d \exp_u(0))(Y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_u(tY) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t, Y) \\ &= Y. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$d \exp_u(0) = \mathbb{1},$$

sodass  $d \exp_u$  nicht singulär ist bei  $0$ . Eine Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung ergibt die Behauptung. □

**Beispiel 3.6.5.** Sphäre

$$\begin{aligned}\exp_p(v) &= \gamma(1, v) = \gamma(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}) \\ &= p \cos(\|v\|) + \sin(\|v\|) \frac{v}{\|v\|}\end{aligned}$$

Dabei muss  $\|v\| < \pi$  gelten.

**Definition 3.6.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Sei  $E_1, E_2$  eine Orthonormalbasis von  $T_u X$ .

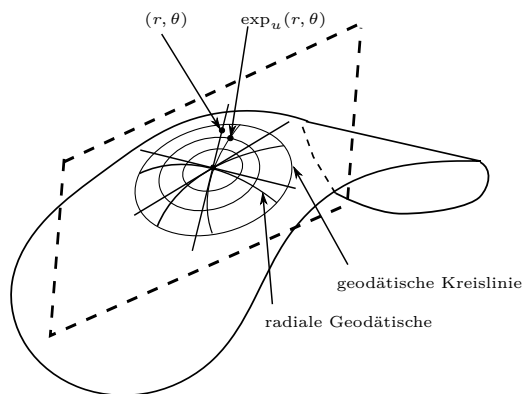
- i) Unter *Riemannschen Normalkoordinaten* verstehen wir folgendes Koordinatensystem, bzw. folgende Parametrisierung:

$$(v^1, v^2) \rightarrow \exp_u(v^1 E_1 + v^2 E_2)$$

- ii) Unter *geodätischen Polarkoordinaten* in  $B_\varepsilon(0)$  verstehen wir

$$(r, \varphi) \rightarrow \exp_u(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))$$

Die Kurven  $r = \text{const}$  heißen *geodätische Kreise*,  $\varphi = \text{const}$  heißen *radiale Geodätische*.



**Bemerkung 3.6.7.** Für die Parametrisierung der Ebene

$$X(r, \varphi) := \exp_u(r, \varphi) = r \cos \varphi E_1 + r \sin \varphi E_2$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}X_r &= \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2 \\ X_\varphi &= -r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} X_\varphi \cdot X_\varphi &= g_{\varphi\varphi} = r^2 \\ X_r \cdot X_r &= g_{rr} = 1. \end{aligned}$$

Also folgt  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

**Satz 3.6.8** (Gauß-Lemma). *Sei*

$$\exp_u(r, \varphi) = \exp_u(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))$$

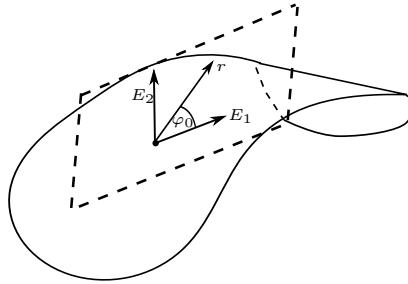
eine lokale Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ . Dann hat bezüglich dieser Parametrisierung die Riemannsche Metrik  $g_{ij}$  die Form

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

mit positiver Funktion  $g_{22}$ , wobei

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22}(r, \varphi) = 0 \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{22}}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \partial_r \sqrt{g_{22}} = 1.$$

*Beweis.*



Es sei  $X(r, \varphi) = \exp_u(r, \varphi)$  und  $\varphi = \varphi_0$  fest.

Sei  $v = \cos \varphi_0 E_1 + \sin \varphi_0 E_2$ .

$$\begin{aligned} X(r, \varphi_0) &= \exp_u(r, \varphi_0) = \gamma(1, rv) \\ &= \gamma(r, v) \end{aligned}$$

$r \rightarrow X(r, \varphi_0)$  ist Geodätische mit  $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}|_{r=0} = v \cdot v = 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} g_{rr} &= X_r \cdot X_r \\ &= \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1 \end{aligned}$$

mit  $\dot{\gamma}|_{r=0} = v$  und  $\|v\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g_{r\varphi}(r, \varphi_0) &= \frac{\partial}{\partial r} g(X_r, X_\varphi) \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial r} X_r, X_\varphi\right) + g\left(X_r, \frac{\partial}{\partial r} X_\varphi\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{dr} X_r, X_\varphi\right) + g\left(X_r, \frac{\partial}{\partial \varphi} X_r\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} g(X_r, X_r) = 0. \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt einging, dass  $X(r, \varphi)$  Geodäte in  $r$  ist und dass  $g(X_r, X_r) = X_r \cdot X_r = 1$ . Weiter gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi = \lim_{r \rightarrow 0} (d \exp_u(r, \varphi))(r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1(r(\sin \varphi E_1 + \cos \varphi E_2)) = 0$$

Also folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22}(r, \varphi) = g(X_r, \lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi) = 0$$

Damit folgt  $g_{r\varphi} = 0$  und  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$ .

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{22}}{r^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} g\left(\frac{X_\varphi}{r}, \frac{X_\varphi}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} g(d \exp(r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2), d \exp(r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2)) \\ &= v \cdot v = 1 \end{aligned}$$

und

$$\partial_r \sqrt{g_{22}}(0, \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{22}}(r, \varphi) - \sqrt{g_{22}}(0, \varphi)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{22}}}{r} = 1.$$

□

**Satz 3.6.9.** Für die Gauß-Krümmung  $G$  gilt

$$G(r, \varphi) = \frac{-\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

*Beweis.* Für die Christoffel-Symbole gilt nach Satz 3.2.6

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}).$$

Es ist  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$  und  $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$ .

Wir berechnen  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$  und

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} (\partial_r g_{22} + \partial_j g_{12} - \partial_m g_{ij}) g^{22} \\ &= \frac{1}{2} \partial_r g_{22} g_{22}^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \partial_r g_{22} \end{aligned}$$

$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \partial_\varphi g_{22} g_{22}^{-1}$  brauchen wir nicht.

Wir wollen die Gleichung

$$G = \frac{R_{1212}}{\det \varphi}$$

verwenden. Aus  $g_{11} = 1$  und  $g_{12} = g_{21} = 0$  folgt  $R_{1212} = g_{11}R_{212}^1 = R_{212}^1$  und  $\det g_{ij} = g_{22}$ . Wir berechnen nach Definition 3.5.3 den Riemannschen Krümmungstensor:

$$\begin{aligned}
 R_{212}^1 &= \partial_r \Gamma_{22}^1 - \partial_\varphi \Gamma_{21}^1 + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1) \\
 &= \partial_r \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 \\
 &= \partial_r \left( -\frac{1}{2} \partial_r g_{22} \right) - \left( \frac{1}{2} \partial_r g_{22} g_{22}^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \partial_r g_{22} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_r^2 g_{22} + \frac{1}{4} (\partial_r g_{22})^2 g_{22}^{-1} \\
 \Rightarrow G &= \frac{R_{212}^1}{g_{22}} = -\frac{1}{2g_{22}} \left( \partial_r^2 g_{22} + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} (\partial_r g_{22})^2 \right) \\
 &= -\frac{\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}
 \end{aligned}$$

□

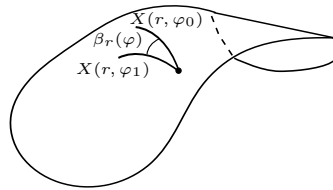
**Folgerung 3.6.10.** Aus Satz 3.6.9

$$G = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}} \Leftrightarrow \partial_r^2 \sqrt{g_{22}} = -G \sqrt{g_{22}}$$

folgt

$$\partial_r^3 \sqrt{g_{22}} = -\partial_r \sqrt{g_{22}} G - \sqrt{g_{22}} \partial_r G$$

**Bemerkung 3.6.11.** Wir betrachten nun die Bogenlänge  $L$  einer Kurve  $X(r, \varphi) = \beta_r(\varphi)$  zwischen zwei benachbarten Geodäten  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ .



$$\begin{aligned}
 L(\beta_r(\varphi)) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \|\dot{\beta}_r(\varphi)\| d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{X_\varphi \cdot X_\varphi} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} d\varphi
 \end{aligned}$$

Nach Satz 3.6.9 gilt  $\sqrt{g_{22}}G = -\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}$ . Damit ergibt sich

$$\partial_r^2 L(\beta_r(\varphi)) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \partial_r^2 \sqrt{g_{\varphi\varphi}} d\varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} G \sqrt{g_{22}} d\varphi.$$

Also folgt

- i) falls  $G = 0$ , dann ist  $\partial_r^2 L(\beta_r) = 0$ . Die benachbarten Geodäten sind also unbeschleunigt, wie in der Ebene.
- ii) falls  $G > 0$ , dann ist  $\partial_r^2 L(\beta_r) < 0$ . Die benachbarten Geodäten werden also zueinander hin beschleunigt.
- iii) falls  $G < 0$ , dann ist  $\partial_r^2 L(\beta_r) > 0$ . Die benachbarten Geodäten werden also voneinander weg beschleunigt.

Eine weitere Anwendung der geodätischen Polarkoordinaten besteht in der geometrischen Interpretation der Gauß-Krümmung.

**Bemerkung 3.6.12.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten. Mittels Taylorentwicklung um  $r = 0$  bei festem  $\theta$  ergibt sich

$$\sqrt{g_{22}}(r, \theta) = r - \frac{r^3}{6}G + R(r)$$

mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(r)}{r^3} = 0$ .

*Beweis.* Es gilt mit Taylorentwicklung um  $r = 0$  bei festem  $\theta$

$$\sqrt{g_{22}}(r, \theta) = \sqrt{g_{22}}(0, \theta) + r\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \theta) + \frac{r^2}{2}\partial_r^2\sqrt{g_{22}}(0, \theta) + \frac{r^3}{6}\partial_r^3\sqrt{g_{22}}(0, \theta) + R(r, \theta)$$

mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{r^3} = 0$ .

Nach Folgerung 3.6.10 gilt

$$\partial_r^2\sqrt{g_{22}} = -\sqrt{g_{22}}G \text{ und } \partial_r^3\sqrt{g_{22}} = -\partial_r\sqrt{g_{22}}G - \sqrt{g_{22}}\partial_r G.$$

Einsetzen in die obige Taylorentwicklung liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{22}}(r, \theta) &= \sqrt{g_{22}}(0, \theta) + r\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \theta) - \frac{r^2}{2}\sqrt{g_{22}}(0, \theta)G(0, \theta) + \frac{r^3}{6}(-\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \theta)G(0, \theta) \\ &\quad - \sqrt{g_{22}}(0, \theta)\partial_r G(0, \theta)) + R(r, \theta) \end{aligned}$$

Weiter wissen wir aus dem Gauß-Lemma 3.6.8, dass

$$\sqrt{g_{22}}(0, \theta) = 0 \text{ und } \partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \theta) = 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{22}}(r, \theta) &= 0 + r - 0 + \frac{r^3}{6}(-G(0, \theta) - 0) + R(r, \theta) \\ &= r - \frac{r^3}{6}G + R \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.6.13.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten und  $L_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}}(r, \theta)d\theta$  der Umfang der geodätischen Kreislinie mit Radius  $r$ . Dann gilt für die Gauß-Krümmung  $G$

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - L_r}{r^3} \frac{3}{\pi}$$



*Beweis.* Wir berechnen  $L_r$  mittels der Taylorentwicklung aus Bemerkung 3.6.12:

$$\begin{aligned} L_r &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(r, \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r - \frac{r^3}{6} G + R(r) d\theta \\ &= 2\pi r - \frac{r^3}{3} \pi G + R'(r) \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R'}{r^3} = 0$ .

Damit gilt also

$$\begin{aligned} G &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{L_r - 2\pi r}{-\frac{r^3}{3} \pi} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - L_r}{r^3} \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.6.14.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten und  $L_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(r, \theta)} d\theta$  der Umfang der geodätischen Kreislinie mit Radius  $r$ . Sei  $A(r)$  die Fläche dieser geodätischen Kreislinie. Dann gilt für die Gauß-Krümmung  $G$

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12 \pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}$$

*Beweis.* Wir berechnen  $A_r$  erneut mittels der Taylorentwicklung aus Bemerkung 3.6.12:

$$\begin{aligned} A_r &= \int_0^r L_s ds \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(s, \theta)} d\theta ds \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} s - \frac{s^3}{6} G + R d\theta ds \\ &= \int_0^r 2\pi s \frac{\pi s^3}{3} G + R' ds \\ &= \pi r^2 \frac{\pi r^4}{12} G + \tilde{R} \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}}{r^3} = 0$ .

Damit gilt also

$$\begin{aligned} G &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_r - \pi r^2}{-\frac{\pi r^4}{12}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12\pi r^2 - A_r}{r^4} \frac{12}{\pi} \end{aligned}$$

□

### 3.7 Minimalflächen

Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Abbildung  $N$ .

Wir leiten jetzt eine notwendige Bedingung für Minimalflächen her. Sei  $\partial X(U)$  der feste Rand von  $X(U)$ .

Wir nehmen an, dass  $X(U)$  minimalen Flächeninhalt hat in dem Sinne, dass

$$X^\varepsilon(u^1, u^2) = X + \varepsilon\varphi(u^1, u^2)N(u^1, u^2)$$

mit fester Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \subset C^2$  und  $\varphi|_{\partial U} = 0$ .

**Satz 3.7.1.** *Sei  $A(X^\varepsilon)$  minimal bei  $\varepsilon = 0 \forall \varphi \in C^2(U)$ , mit  $\varphi|_{\partial U} = 0$ . Dann gilt für die mittlere Krümmung  $H$*

$$H = 0 \forall u \in U.$$

*Beweis.* Wir stellen zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \det g_{ij}^\varepsilon &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (g_{11}^\varepsilon g_{22}^\varepsilon - (g_{12}^\varepsilon)^2) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} ((g_{11} - 2\varepsilon\varphi k_{11})(g_{22} - 2\varepsilon\varphi k_{22}) - (g_{12} - 2\varepsilon\varphi k_{12})\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= -2\varphi(k_{11}g_{22} + k_{22}g_{11} - 2k_{12}g_{12}). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \iint_U A(X^\varepsilon) du^1 du^2 \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \iint_U \sqrt{\det g_{ij}^\varepsilon} du^1 du^2 \\ &= \iint_U \frac{\frac{d}{d\varepsilon} \det g_{ij}^\varepsilon}{2\sqrt{\det g_{ij}^\varepsilon}}\Big|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \\ &= - \iint_U \frac{\varphi}{\sqrt{\det g_{ij}}} (k_{11}g_{22} + k_{22}g_{11} - 2k_{12}g_{12}) du^1 du^2 = (*) \end{aligned}$$

Da

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det g_{ij}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum k_i^i = \frac{1}{2} \sum k_{ij} g^{ji} \\ &= \frac{1}{2} (k_{11}g^{11} + k_{22}g^{22} + 2k_{12}g^{12}) \\ &= \frac{1}{2 \det g_{ij}} (k_{11}g_{22} + k_{22}g_{11} - 2k_{12}g_{12}) \\ &\Rightarrow 2H \det g_{ij} = k_{11}g_{22} + k_{22}g_{11} - 2k_{12}g_{12} \end{aligned}$$

Dies können wir oben für (\*) verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} A(X^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \\ &= - \iint_U 2H(u^1, u^2) \varphi(u^1, u^2) \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2 \quad \forall \varphi \in C^2(U) \\ \Rightarrow H &= 0 \quad \forall u \in U. \end{aligned}$$

□

Dies kann folgendermaßen verallgemeinert werden:

**Bemerkung 3.7.2.** Sei  $X^\varepsilon$  so, dass  $\frac{d}{d\varepsilon} X^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = Y$  mit  $Y|_{\partial U} = 0$ . Dann gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(X^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = - \iint_U Y \cdot NH \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2.$$

**Definition 3.7.3.** Man bezeichnet eine Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  als *Minimalfläche*, wenn  $H \equiv 0$ .

Man kann Minimalflächen sehr gut bei isothermen Parametrisierungen beschreiben.

**Definition 3.7.4.** Man nennt eine parametrisierte Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  *isotherm*, wenn  $X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2$  und  $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1 = 0$  ist, also

$$g_{ij} = \lambda(u^1, u^2) \delta_{ij} = \lambda(u^1, u^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Satz 3.7.5.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine isotherme parametrisierte Fläche. Dann gilt

$$X_{11} + X_{22} = 2\lambda^2 HN,$$

wobei  $g_{ij} = \lambda(u^1, u^2) \delta_{ij}$ .

*Beweis.* Mit

$$X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^1} (X_1 \cdot X_1) &= \frac{\partial}{\partial u^1} (X_2 \cdot X_2) \\ \Rightarrow X_{11} \cdot X_1 &= X_{21} \cdot X_2. \end{aligned}$$

Da

$$X_1 \cdot X_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^2} (X_1 \cdot X_2) = 0 \Rightarrow X_{12} \cdot X_2 = -X_1 \cdot X_{22}$$

folgt

$$\begin{aligned} X_{11} \cdot X_1 &= -X_1 \cdot X_{22} \\ \Leftrightarrow (X_{11} + X_{22}) \cdot X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Analog für  $\frac{\partial}{\partial u^2}$  ergibt sich

$$(X_{11} + X_{22}) \cdot X_2 = 0.$$

Da  $X_1$  und  $X_2$  aber senkrecht auf  $N$  stehen folgt daraus

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{22} &= \mu N \\ \Leftrightarrow X_{11}N + X_{22}N &= \mu \end{aligned}$$

und für die mittlere Krümmung

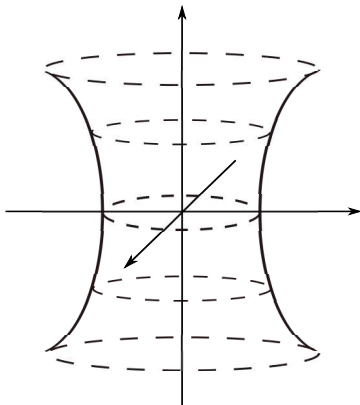
$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_{11} + k_{22}) \frac{1}{\det g_{ij}} \\ &= \frac{1}{2}(X_{11}N + X_{22}N) \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{1}{\lambda^2} \\ \Leftrightarrow \mu &= 2H\lambda^2 \\ X_{11}N + X_{22}N &= 2H\lambda^2 \\ X_{11} + X_{22} &= 2H\lambda^2 N \end{aligned}$$

□

**Folgerung 3.7.6.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und sei  $X$  isotherm. Dann ist  $X$  genau dann eine Minimalfläche, wenn die  $X(u^1, u^2) = (X^1, X^2, X^3)$  harmonische Funktionen sind, wenn also

$$\Delta X^i = \partial_{u^1}^2 X^i + \partial_{u^2}^2 X^i = 0.$$

**Beispiel 3.7.7.** Katenoid



Sei  $0 < \varphi < 2\pi$ . Wir betrachten die Drehfläche

$$\begin{aligned} X(t, \varphi) &= D_\varphi^z \begin{pmatrix} a \cosh t \\ 0 \\ at \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cosh t \\ 0 \\ at \end{pmatrix} \\ &= (a \cos \varphi \cosh t, a \sin \varphi \cosh t, at) \end{aligned}$$

Es ist also  $X^1 = a \cos \varphi \cosh t$ ,  $X^2 = a \sin \varphi \cosh t$ ,  $X^3 = at$ . Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 X^1 &= X_{tt}^1 = a \cos \varphi \cosh t \\ \partial_\varphi^2 X^1 &= X_{\varphi\varphi}^1 = -a \cos \varphi \cosh t \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^1 + \partial_\varphi^2 X^1 = 0 \\ \partial_t^2 X^2 &= X_{tt}^2 = a \sin \varphi \cosh t \\ \partial_\varphi^2 X^2 &= X_{\varphi\varphi}^2 = -a \sin \varphi \cosh t \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^2 + \partial_\varphi^2 X^2 = 0 \\ \partial_t^2 X^3 &= X_{tt}^3 = 0 \\ \partial_\varphi^2 X^3 &= X_{\varphi\varphi}^3 = 0 \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^3 + \partial_\varphi^2 X^3 = 0 \end{aligned}$$

Also gilt  $\Delta X^i = \partial_{u_1}^2 X^i + \partial_{u_2}^2 X^i = 0$  und  $X(t, \varphi)$  ist somit Minimalfläche.

## Index

- Ableitung
  - kovariante, 42
- algebraischer Wert, 46
- Asymptotenlinie, 36
- Asymptotenrichtung, 36
- begleitendes Dreibein, 14
- Binomialvektor, 14
- Christoffel-Symbole, 43
- Defektwinkel, 52, 59
- Drehfläche, 31
- elliptisch, 35
- Erzeugende, 40
- Euler-Charakteristik, 57
- Euler-Formel, 34
- Exponentialabbildung, 63
- Fläche
  - parametrisierte, 18
- Flächeninhalt, 24
- Flachpunkt, 35
- Fundamentalform
  - erste, 22
  - zweite, 28
- Gauß-Abbildung, 21
- Gauß-Bonnet, 52
- Gauß-Notation, 22
- Geodätische, 44
  - radiale, 65
- geodätische Kreise, 65
- geodätische Polarkoordinaten, 65
- Geschlecht, 58
- geschlossen, 6
  - einfach, 6
- Hauptkrümmung, 33
- Hauptkrümmungsrichtungen, 33
- hyperbolisch, 35
- isoperimetrische Ungleichung, 12
- isotherm, 72
- Kommutator, 28
- Koordinatendarstellung, 22
- kovariante Ableitung, 42
- Krümmung, 7, 14
  - Gauß-, 26
  - geodätische, 33, 46
  - Haupt-, 33
  - mittlere, 26
  - Normal-, 32
- Krümmungslinie, 36
- Krümmungstensor
  - Riemannscher, 60
- Kurve, 3
  - parametrisierte, 1
  - orientierte, 4
  - parametrisierte
    - nach Bogenlänge, 4
  - reguläre, 1
  - stückweise glatte, 11
- Länge, 5
- Leitkurven, 40
- lokal isometrisch, 38
- lokale kanonische Form, 17
- Minimalfläche, 72
- Nabelpunkt, 35
- Normalenfeld, 7, 21
- Normalenvektor, 14
- Normalkoordinaten
  - riemannsche, 65
- Normalkrümmung, 32
- orientierungserhaltend, 3
- orientierungsumkehrend, 3
- parabolisch, 35
- parallel, 44
- Parametertransformation, 3, 20
- parametrisiert
  - nach Krümmungslinie, 37
- periodisch, 6
- Polarkoordinaten
  - geodätische, 65
- radiale Geodätische, 65

- Raumkurve
  - orientierte, 14
  - parametrisierte, 14
  - reguläre, 14
- Regelfläche, 31
- regulär, 1
- Richtungsableitung, 28
- Riemannsche Normalkoordinaten, 65
- Riemannscher Krümmungstensor, 60
  
- Satz
  - Haupt- der Raumkurventheorie, 15
  - Umlauf-, 11
  - Frenet-Gleichung, 9, 15
- Schmiegtorse, 41
- Spur, 4
  
- Tangentenfeld, 21
- Tangentialfläche, 41
- Tangentialraum, 19
- Theorem Elegantissimum, 53
- Theorema Egregium, 49
- Torse, 40
- Torsion, 14
  
- Umlaufzahl, 10
- Umparametrisierung, 3, 20
  - orientierungserhaltende, 20
  
- Vektorfeld, 21
  
- Weingarten-Abbildung, 24
- Windung, 14