Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 3 (Abgabe am 04.11.2013)

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Für den funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ zwischen zwei Größen x und y machen Modell A und Modell B verschiedene Vorhersagen, f_A und f_B, auf der Grundlage von zwei Hypothesen H_A und H_B. Um zwischen H_A und H_B zu entscheiden, führen Sie ein Experiment durch und gewinnen folgende Messwerte für x und y:

x	1,3	1,7	2,0	2,2	2,5
y	0,2518	0,3096	0,3854	0,4083	0,4608
$f_A(x)$	0,2530	0,2917	0,3877	0,4169	0,4625
$f_B(x)$	0,2725	0,3143	0,3806	0,4122	0,4590

Wie Sie sehen, liegt manchmal $f_A(x)$ näher am wahren Wert y und manchmal $f_B(x)$. Um zu beurteilen, welches Modell insgesamt näher an der Wahrheit liegt, betrachten wir die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^5$: $u = \big(y_1, \dots y_5\big)$, $v_A = \big(f_A(x_1), \dots, f_A(x_5)\big)$, und $v_B = \big(f_B(x_1), \dots, f_B(x_5)\big)$, wobei x_i und y_i die Messwerte in der aufgelisteten Reihenfolge sein sollen. Bestimmen Sie die Abstände $d(v_A, u)$ und $d(v_B, u)$ im $\mathbb{R}^5$, die wir als Maß für die Abweichung der Vorhersage von der Wirklichkeit verwenden. Welche Vorhersage ist demnach die genauere? Um wieviel Prozent ist die Ungenauigkeit der anderen Vorhersage größer?

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Von einem See wird jährlich am 1. Januar die Fläche bestimmt, mit folgenden Ergebnissen:

Jahr	2009	2010	2011	2012	2013
Fläche (in km^2)	100	90	81	89,1	98,01

Bestimmen Sie: (a) für jedes Jahr die prozentuale Flächenzunahme; (b) das arithmetische Mittel der jährlichen prozentualen Flächenzunahme; (c) die mittlere jährliche prozentuale Flächenzunahme. Erläutern Sie kurz den Unterschied zwischen (b) und (c), und welche Art der Mittelung für (c) verwendet werden muss.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Sebastian fährt mit 180 km/h nach München. Auf dem Rückweg (auf der gleichen Strecke) schafft er nur 90 km/h. Wie hoch war seine Durchschnittsgeschwindigkeit? Bei 90 km/h liegt der Benzinverbrauch von Sebastians Auto bei $6\,\ell/100\,\text{km}$, bei 180 km/h sind es $11\,\ell/100\,\text{km}$. Wie groß war sein Durchschnittsverbrauch?

Aufgabe 15 MATLAB[1] (10 Punkte)
Plotten Sie die Gauß-Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (*)$$

im Intervall $[-12, 16]$ für $\mu = 2$ und $\sigma = 4$ wie in Beispiel 2. Definieren Sie sich hierzu zuerst Variablen `mu` und `sigma`.
HINWEIS: Die Quadratwurzel von `p` berechnet man mit `sqrt(p)`.
Wie erhält man jedoch π?

Aufgabe 16 MATLAB (10 Punkte)
Öffnen Sie einen Text-Editor (klicken dazu z.B. im MATLAB-Fenster auf das Pulldown-Menü `File` und wählen Sie `New` → `M-File` oder `Script`). Mit Hilfe des Text-Editors können Sie externe MATLAB-Funktionen und Skripte schreiben und diese im MATLAB-Verzeichnis abspeichern. Schreiben Sie nun eine Funktion `gauss(x,mu,sigma)` analog zu Beispiel 4, welche als Eingaben `x` (Datenvektor!), `mu` (Skalar) und `sigma` (Skalar) erhält und den entsprechenden Funktionswert von (∗) an der Stelle `x` ausgibt. Der Aufruf erfolgt im MATLAB-Command Window durch

» `x = -12:.1:16;` Unser bekannter Datenvektor...
» `mu = ... , sigma = ...` definiert Variablen `mu` und `sigma` und weist ihnen Werte zu.
» `fx = gauss(x,mu,sigma)` Aufruf der Funktion `gauss`, deren Ausgabe ein Datenvektor mit Funktionswerten von (1) ist.
» `plot(x,fx)` Zeichnet die $\mathtt{fx}_i$ und $\mathtt{x}_i$ in ein Diagramm

Abzugeben ist hier der Text Ihrer Funktion `gauss.m`.

Aufgabe 17 MATLAB (10 Punkte)
Berechnen Sie (analog zu Beispiel 3) die ersten 100 Fibonacci-Zahlen, definiert durch ($t \in \mathbb{N}$)

$$F_1 = 1\,, \qquad F_2 = 1\,, \qquad F_t = F_{t-1} + F_{t-2} \quad \forall\, t \geq 3\,,$$

und stellen Sie die ersten 10 und die ersten 100 Werte jeweils graphisch dar.

[1] Hinweise zu MATLAB: Siehe Zusatzblatt.