

# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 6 (Abgabe am 25.11.2013)

---

### Aufgabe 30

(10 Punkte)

Wir simulieren 1000 radioaktive Atome und nehmen an, dass jedes Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 3,6\% = 0,036$  innerhalb einer Sekunde zerfällt. Für diese Simulation erzeugen wir eine Zufallszahl<sup>4</sup>  $X \in (0, 1)$ . Gilt  $X \leq 0,036$ , so soll das simulierte Atom zerfallen, sonst nicht. Das Verfahren wiederholen wir in einer Funktion<sup>5</sup> `decay` so oft, bis das Atom zerfallen ist, und generieren so die zufällige Anzahl Sekunden  $t$  bis zum Zerfall. Führen Sie dies für 1000 Atome durch und plotten Sie in ein Histogramm, wie viele Atome wann zerfallen sind.

```
N=];           % Ergänzen Sie geeignet.
Atome=zeros(1,N);
for n=1:N
    Atome(n)=decay();
end
hist(Atome,max(Atome)); % Lesen Sie sich die Hilfe zu hist durch,
                        % und spielen Sie etwas damit...
```

Plotten Sie zum Vergleich die (zufalls-unabhängige) Anzahl der zu erwartenden Zerfälle im Zeitintervall  $[t, t + 1]$ ,

$$Z(t) = Z(0) \exp(-\lambda t),$$

mit  $Z(0) = pN$  (warum?); bestimmen Sie dazu zunächst  $\lambda$  aus

$$\exp(-\lambda \cdot 1 \text{ sec}) = 1 - p \quad (\text{warum?}).$$

BEMERKUNG:  $Z(t)$  beschreibt den Zerfallsprozess umso besser, je größer  $N$  ist. Probieren Sie auch mal  $N = 100$  und  $N = 10\,000$  aus.

---

<sup>4</sup>Beispiel 7: (Erzeugung von Zufallszahlen)

Der Befehl `A=rand(N)` erzeugt eine  $N \times N$ -Matrix `A` (ein Zahlenschema aus  $N$  Zeilen und  $N$  Spalten) mit Zufallswerten  $A_{ij} \in (0, 1)$ . Für unsere Zwecke genügt es, jeweils *eine* Zufallszahl  $X$  zu berechnen, also  
» `X=rand(1)`

<sup>5</sup>Legen Sie eine Datei mit dem Namen `decay.m` mit dem folgenden Inhalt an (vgl. Beispiel 4).

```
function zeit=decay()
    zeit=1;
    X=rand(1);
    while(X>) % while(...) durchläuft die folgenden Anweisungen
        zeit=zeit+1; % solange die Bedingung in der Klammer erfüllt ist.
        X=rand(1); % Ergänzen Sie die Bedingung geeignet.
    end
end
```

Probieren Sie ein paar Mal im Command Window aus, was passiert, wenn man `decay()` eingibt.

**Aufgabe 31** (Fehlerrechnung zur Radiokarbon-Methode) (10 Punkte)

- a) Bei einer Probe von 2,3 g Kohlenstoff messen Sie  $18,5 \pm 1,5$  Zerfälle pro Minute. Um festzustellen, wie sich die Messungenauigkeit auf die Ungenauigkeit des Altersschätzers auswirkt, bestimmen Sie, wie in Aufgabe 25, einmal den Altersschätzer  $A(17)$  für 17 Zerfälle pro Minute und einmal den Altersschätzer  $A(20)$  für 20 Zerfälle pro Minute. Begründen Sie, dass für jede Zerfallsrate  $Z$  zwischen 17 und 20 der Altersschätzer  $A(Z)$  zwischen  $A(17)$  und  $A(20)$  liegt.
- b) Nehmen Sie nun an, dass Sie auch die Masse  $m$  der Probe nicht exakt bestimmen konnten, sondern nur als  $2,3 \text{ g} \pm 0,2 \text{ g}$ . Wie lautet nun, bei zwei Fehlerquellen, das Intervall, in dem die Altersschätzer  $A(Z, m)$  liegen können (mit Erklärung)?

**Aufgabe 32** (10 Punkte)

Ein Vogel fliegt 10 min lang mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s über Grund nach Westen. Danach fliegt er 5 min lang nach Südwesten. Während der gesamten Zeit weht ein konstanter Wind mit 3 m/s aus Südosten. Gegenüber der ihn umgebenden Luft bewegt sich der Vogel die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

- a) Wie schnell bewegt sich der Vogel gegenüber der ihn umgebenden Luft?  
b) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt der Vogel Richtung Südwesten?  
c) Wieviel m südlich und wieviel m westlich vom Ausgangsort befindet sich der Vogel nach der Gesamtflugzeit von 15 min?

HINWEISE: Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen  $x_1$ -Achse nach Osten und dessen  $x_2$ -Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit  $\vec{w}$  den Vektor der Windgeschwindigkeit sowie mit  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft (alles in m/s); zu a: Geben Sie  $\vec{v}_1$  und  $\vec{w}$  an und bestimmen Sie daraus zunächst  $\vec{u}_1$  und dann  $|\vec{u}_1|$ ; zu b: Es gilt  $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$  (warum?) und  $\vec{v}_2 = \frac{|\vec{v}_2|}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (warum?).

**Aufgabe 33** (10 Punkte)

Wir betrachten einen Kreis mit Radius  $R$  um den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit Achsen  $x$  und  $y$ .

- a) Geben Sie die Gleichung dieses Kreises an.

Sei  $\vec{r}$  der Vektor vom Ursprung zum rechten Schnittpunkt des Kreises mit der  $x$ -Achse,  $P$  ein beliebiger Punkt auf dem Kreis mit  $y \neq 0$ ,  $\vec{p}$  der Vektor vom Ursprung zu  $P$  und  $\phi$  der Winkel, den  $\vec{p}$  mit der  $x$ -Achse bildet.

- b) Zeichnen Sie den Kreis, sowie die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$ .  
c) Geben Sie  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  in kartesischen Koordinaten an.

HINWEIS: Die Koordinaten enthalten dann die Parameter  $R$  und  $\phi$ .

Sei  $\vec{a}$  der Vektor vom rechten Schnittpunkt des Kreises mit der  $x$ -Achse zu  $P$ ,  $\vec{b}$  der Vektor vom linken Schnittpunkt des Kreises mit der  $x$ -Achse zu  $P$  und  $\vec{c}$  der Vektor vom linken zum rechten Schnittpunkt des Kreises mit der  $x$ -Achse.

- d) Zeichnen Sie  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  in Ihr Diagramm aus Teil a ein.  
e) Drücken Sie  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  jeweils als Linearkombination von  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  aus.  
f) Beweisen Sie den Satz des Thales, d.h. zeigen Sie, dass  $\vec{a}$  orthogonal zu  $\vec{b}$  ist.

**Aufgabe 34** (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 15.12.13 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Scaling vectors* und
- *Adding vectors*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).