Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 13.01.2014)

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+7}}\,, \\ f_2(x) &= 13^x\,, \\ f_3(x) &= \log(\log(x)) \quad \text{und} \\ f_4(x) &= \sqrt{\sqrt{x}}\;\sin^2(x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 53 (10 Punkte)
Sie messen eine Größe x mit einer bestimmten Genauigkeit, d.h. Ihr Messwert ist mit einem (absoluten) Fehler δx behaftet. Aus der Messgröße bestimmen Sie rechnerisch den Wert einer weiteren Größe $y = f(x)$ wobei Ihnen die Funktion f bekannt ist. Für den (absoluten) Fehler δy, der Größe f wurde in der Vorlesung die Abschätzung $\delta y = f'(x) \cdot \delta x$ angegeben. Sei der Zusammenhang zwischen x und y nun durch ein Potenzgesetz gegeben, d.h. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ fest ($x > 0$). Drücken Sie den relativen Fehler von y, d.h. $\frac{\delta y}{y}$ als Funktion von $\frac{\delta x}{x}$ aus.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel, der Produktregel und der Ableitung von $x \mapsto 1/x$ die Quotientenregel
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$
b) Berechnen Sie damit die Ableitung von $x \mapsto \tan x$ und drücken Sie das Ergebnis einmal mit Hilfe von cos und einmal mit Hilfe von tan aus!
c) Berechnen Sie nun außerdem die Ableitung der arctan-Funktion. Benutzen Sie dazu den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung.

Aufgabe 55 (18 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 19.01.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Geometric series of constants*,
- *Derivatives 1*,
- *Recognizing slope of curves*,
- *Derivative intuition*,
- *Graphs of functions and their derivatives* und
- *Product rule*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweise: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Der Schwerpunkt eines rutschenden Kindes befinde sich zur Zeit t an der Stelle

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t^2) \\ 2\sin(2t^2) \\ 10 - 3t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \sqrt{10/3}\,.$$

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Kindes mit MATLAB.

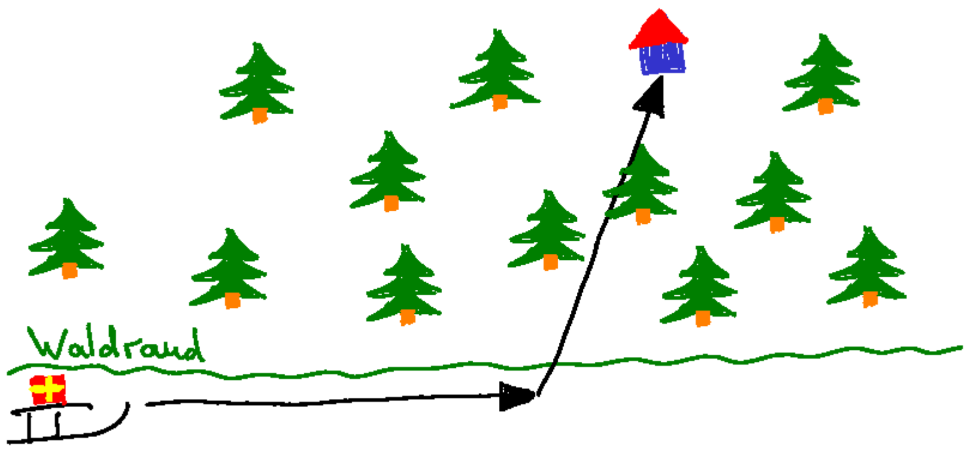
```
>> t=0:.05:AAA;                  % Setzen Sie für AAA und BBB geeignete
>> plot3(2*cos(2*t.^2),2*sin(2*t.^2),BBB,'*-')     % Ausdrücke ein.
```

b) Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ und deren Betrag $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

c) Welche Geschwindigkeit v hat das Kind, wenn es die Höhe Null ($x_3 = 0$) erreicht, und in welche Richtung bewegt es sich dann. (Geben Sie als Antwort auf die letzte Frage einen Einheitsvektor an.)

Aufgabe 57 (10 Punkte)

Da der Weihnachtsmann viele Kinder zu beliefern hat, muss er sich beeilen. Gerade ist ist er auf dem Weg zu einem abgelegenen Haus im Wald. Momentan befindet er sich am Waldrand in 5km Abstand zum Haus (Luftlinie). Das Haus liegt 3km vom Waldrand entfernt (siehe Skizze). Außerhalb des Waldes kann der Weihnachtsmann sich mit seinem Schlitten mit einer Geschwindigkeit von 20km/h fortbewegen. Im Wald muss er laufen und bringt es (auch wegen des Übergewichts) nur auf 3km/h.



a) Nach welcher Wegstrecke sollte er vom Schlitten steigen, um möglichst bald am Haus anzukommen?

b) Berechnen Sie auch die Stelle an der er absteigen sollte, wenn nicht die Zeit bis zur Ankunft am Haus sondern die Zeit bis zu seiner Weiterfahrt minimiert werden soll (der Schlitten bleibe solange stehen).

c) Sein Rentier Rudolph schlägt vor, den Schlitten in der Zwischenzeit weiterzuziehen (wohin?), was der Weihnachtsmann dankend annimmt. Wo sollte er nun absteigen, um wiederum die Zeit bis zur Weiterfahrt zu minimieren?

HINWEIS: Vielleicht können Sie Teil c) lösen, ohne erneut zu rechnen...