Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 27.01.2014)

Aufgabe 64 (10 Punkte)
Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$V(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} - (x + z^2) \sin y \, .$$

Bestimmen Sie außerdem die Richtungsableitung von V im Ursprung in Richtung von $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\dfrac{\partial V}{\partial \vec{e}}(\vec{0})$.

Aufgabe 65 (10 Punkte)
Ein paarungsbereites Nachtfalterweibchen, das im Ursprung eines Koordinatensystems in der Ebene wartet, verströmt einen Duftstoff, der anziehend auf paarungsbereite Nachtfaltermännchen wirkt. Die Konzentration dieses Duftstoffes am Ort mit kartesischen Koordinaten (x, y) betrage (in geeigneten Einheiten)

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, .$$

Ein Nachtfaltermännchen befinde sich im Punkt $(3, 2)$.

a) Skizzieren Sie das Gebiet, in dem die Konzentration des Duftstoffes mindestens $\frac{1}{10}$ beträgt.

b) Angenommen, das Männchen beginnt, "nach links " zu fliegen, d.h. es bewegt sich bei konstantem y-Wert in Richtung abnehmender x-Werte. Wie stark ändert sich dann die Konzentration des Duftstoffes in dem Moment, in dem das Männchen losfliegt?
Hinweis: Denken Sie an partielle Ableitungen.

c) Wenn das Männchen stattdessen geradlinig auf den Punkt $(0, -1)$ zufliegt, wie ändert sich dann die Konzentration des Duftstoffes in dem Moment, in dem es startet?
Hinweis: Denken Sie an Richtungsableitungen.

d) In welche Richtung müsste das Männchen fliegen, damit sich die Konzentration des Duftstoffes, der es ausgesetzt ist, möglichst schnell möglichst stark erhöht? Geben Sie das Ergebnis in Form eines Einheitsvektors an, der in die gesuchte Richtung zeigt.
Hinweis: Denken Sie an den Gradienten.

Aufgabe 66 (10 Punkte)

Die Matrix $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist positiv definit, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist negativ definit und $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist indefinit (d.h. $\vec{x} \cdot (A_3\vec{x})$ kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen).

Zur Illustration plotten wir mit MATLAB die Funktionen

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto f_i(\vec{x}) = \vec{x} \cdot (A_i\vec{x}) \end{aligned}$$

» `x = -1:.01:1;`

» `y = -1:.01:1;` Erzeugt die üblichen Datenvektoren `x` und `y`, hier mit 201 Elementen.

» `[X,Y] = meshgrid(x,y);`

Erzeugt zwei 201×201-Matrizen `X` und `Y`, in deren Zeilen jeweils der Vektor `x` bzw. `y` steht. `X` und `Y` dienen lediglich als Punktegitter, wichtig für uns sind die Vektoren `x` und `y`.

» `f1 = X.^2+2*Y.^2;` Erzeugt eine 201×201-Matrix `f1` mit Einträgen $\mathtt{f1}_{ij} = \mathtt{x}_i^2 + 2\mathtt{y}_j^2$.

» `f2 = -3*X.^2-Y.^2;`

» `f3 = X.^2-Y.^2;`

» `mesh(X,Y,f1);` Erzeugt einen 3D-Plot der Funktion $f_1(x,y) = x^2 + 2y^2$.

» `mesh(X,Y,f2);`

» `mesh(X,Y,f3);`

HINWEIS: Wenn Sie im Plot-Fenster den Icon  anklicken, können Sie anschließend durch Klicken in den Plot und Bewegen der Maus Ihren Blickwinkel verändern.

Geben Sie jeweils an, ob die Funktionen f_i bei $\vec{x} = \vec{0}$ ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattel besitzen.

Entscheiden Sie nun, indem Sie – wie oben – entsprechende 3D-Plots anfertigen, ob die folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 67 (10 Punkte)

Eine Fläche, die sich bis ins Unendliche erstreckt, kann dennoch einen endlichen Flächeninhalt haben. Wir definieren ein Integral mit Grenze ∞ durch

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert und nicht etwa ∞ ist.

a) Untersuchen Sie, für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\gamma}$$

existiert. Berechnen Sie für diese γ das Integral.

b) Berechnen Sie:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

HINWEIS: In Aufgabe 52 haben Sie ausgerechnet, dass $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.