Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 13/14

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

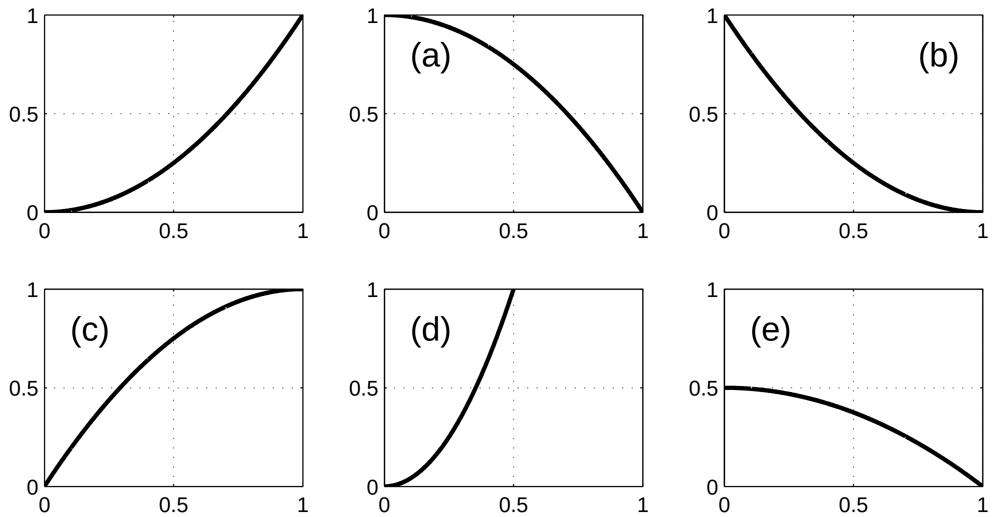
Klausur am 10.02.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 92 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 = 10 Punkte)
Das erste der untenstehenden Diagramme zeigt den Graph der Funktion $f(x) = x^2$. Die weiteren Diagramme zeigen jeweils den Graph einer Funktion, die aus f durch Translation und/oder Spiegelung und/oder Streckung bzw. Stauchung entsteht. Geben Sie diese Funktionen an.



Aufgabe 2 (3+3 = 6 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie AB sowie $A^T B$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

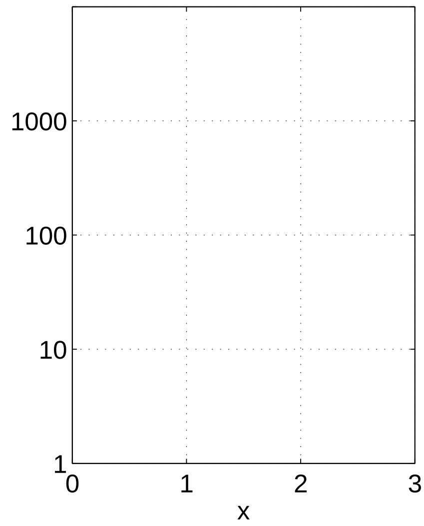
Übertragen Sie das nebenstehende (einfach logarithmische) Diagramm auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ein.

a) $f_a(x) = 10 \cdot 10^{3x}$

b) $f_b(x) = \dfrac{100}{10^x}$

c) $f_c(x) = \sqrt{10} \cdot 10^{x/2}$

d) $f_d(x) = \dfrac{100^x}{10}$



Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

a) Sei $f(x) = \log(\log(x))$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

Berechnen Sie:

b) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$ c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1-2x}{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-\pi x}\,dx$

Hinweis: Integrieren Sie bei (d) partiell, leiten Sie dabei die Funktion $x \mapsto x$ ab.

Aufgabe 5 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $f(\vec{x}) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + 3z^2}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie

a) den Gradient der Funktion, d.h. $(\nabla f)(\vec{x})$, sowie

b) die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

d.h. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0)$.

Aufgabe 6 (6+2+2+2+3 = 15 Punkte)

Frei lebende Gnurpen sterben stets vor ihrem zwölften Geburtstag. Mit drei Jahren erreichen sie die Geschlechtsreife. Weibliche 3-5jährige Gnurpen legen jährlich durchschnittlich 5 Eier, 6-8jährige 15 und 9-11jährige 10. Aus jeweils 40% der Eier schlüpfen noch im selben Jahr weibliche Jungtiere. Von den Jungtieren werden 20% älter als 3 Jahre, 80% der 3-5jährigen werden älter als 6 Jahre und 40% der 6-8jährigen werden älter als 9 Jahre.

Wir betrachten eine isoliert auf einer einsamen Insel lebende Gnurpen-Population. Sei $N_j^{(t)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, die Anzahl der $3(j-1)$jährigen bis $(3j-1)$jährigen weiblichen Gnurpen zur Zeit t – zusammengefasst im Populationsvektor $\vec{N}^{(t)} \in \mathbb{R}^4$. Die zeitliche Entwicklung dieser Population beschreiben wir durch

$$\vec{N}^{(t+1)} = L\vec{N}^{(t)}\,,$$

wobei die Zeit t in Einheiten von 3 Jahren gemessen wird. Die Leslie-Matrix L hat die Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & 4 \\ \boxed{} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die vollständige Leslie-Matrix L an.

Die momentane Gnurpen-Population sei in MATLAB als Vektor `N` eingegeben, die Leslie-Matrix als `L`. Sie führen folgende Befehle aus:

```
>> L\N

ans =

   1.0e+03 *

    8.5000
    1.3750
    1.0000
    0.2625

>> L*N

ans =

       11600
        1960
        1360
         440
```

```
>> L^2*N

ans =

   1.0e+04 *

    1.3840
    0.2320
    0.1568
    0.0544

>> L^3*N

ans =

   1.0e+04 *

    1.6224
    0.2768
    0.1856
    0.0627
```

```
>> L^5*N

ans =

   1.0e+04 *

    2.2746
    0.3836
    0.2596
    0.0886

>> L^(-1)*N

ans =

   1.0e+03 *

    8.5000
    1.3750
    1.0000
    0.2625
```

b) Wieviele 3-5jährige Gnurpen gibt es in 3 Jahren?

c) Wieviele 6-8jährige Gnurpen gibt es in 6 Jahren?

d) Wieviele 3-5jährige Gnurpen gab es vor 3 Jahren?

e) Klimaveränderungen führen dazu, dass nur noch aus 80% der Gnurpen-Eier Jungtiere schlüpfen, wobei auf je 3 männliche Jungtiere ein weibliches kommt. Geben Sie die entsprechend modifizierte Leslie-Matrix an.

Aufgabe 7 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Der Drache Smaug nähert sich dem Berg Erebor aus Nordosten mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten (über Grund). Dabei weht ein Wind aus südöstlicher Richtung mit 5 Knoten. Gegenüber der ihn umgebenden Luft fliegt der Drache mit seiner Maximalgeschwindigkeit.

Bezeichnen Sie immer mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ den Geschwindigkeitsvektor des Drachen über Grund, mit $\vec{u}$ seinen Geschwindigkeitsvektor gegenüber der Luft, und mit $\vec{w}$ den Vektor der Windgeschwindigkeit (alles in Knoten).

Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem, dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt.

a) Geben Sie $\vec{v}$ an.
b) Geben Sie $\vec{w}$ an.
c) Bestimmen Sie $|\vec{u}|$.

An einem anderen Tag ist Smaug unterwegs zur Stadt Esgaroth. Momentan befindet er sich 6 Meilen nördlich und 2 Meilen östlich der Stadt. Er fliegt so schnell er kann geradlinig auf Esgaroth zu. Der Wind bläst mit $\sqrt{10}$ Knoten aus Süden.

d) Geben Sie $\vec{w}$ an.
e) Geben Sie $\vec{v}/|\vec{v}|$ an.
f) Bestimmen Sie $|\vec{v}|$.

Hinweise: $13^2 = 169$ und $17^2 = 289$.

Aufgabe 8 (6+5+2+4 = 17 Punkte)

Aus Reis und Chilibohnen soll eine Mahlzeit zusammengestellt werden, die den folgenden Bedingungen genügt: Sie soll

- mindestens 12 g und höchstens 36 g Eiweiß enthalten sowie
- mindestens 100 g und höchstens 150 g Kohlenhydrate enthalten.

Pro 100 g enthalte

- der Reis 25 g Kohlenhydrate und 2 g Eiweiß sowie
- die Bohnen 10 g Kohlenhydrate und 6 g Eiweiß.

Bezeichnen Sie mit x die Reismenge in 100 g-Einheiten (d.h. $x = 2{,}5$ entspricht 250 g Reis) und mit y die Menge an Chilibohnen, ebenfalls in 100 g-Einheiten.

a) Drücken Sie alle Bedingungen als Ungleichungen in x und y aus.

Kennzeichnen Sie in einem xy-Diagramm ($0 \leq x, y \leq 6$)

b) den Bereich, in dem alle Bedingungen erfüllt sind,
c) den Bereich aller Mahlzeiten die ein Gesamtgewicht von 500 g haben sowie
d) den Punkt, der der Mahlzeit mit minimalem Gesamtgewicht entspricht, die allen Bedingungen genügt. Berechnen Sie außerdem die Koordinaten dieses Punktes.