Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 13/14

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

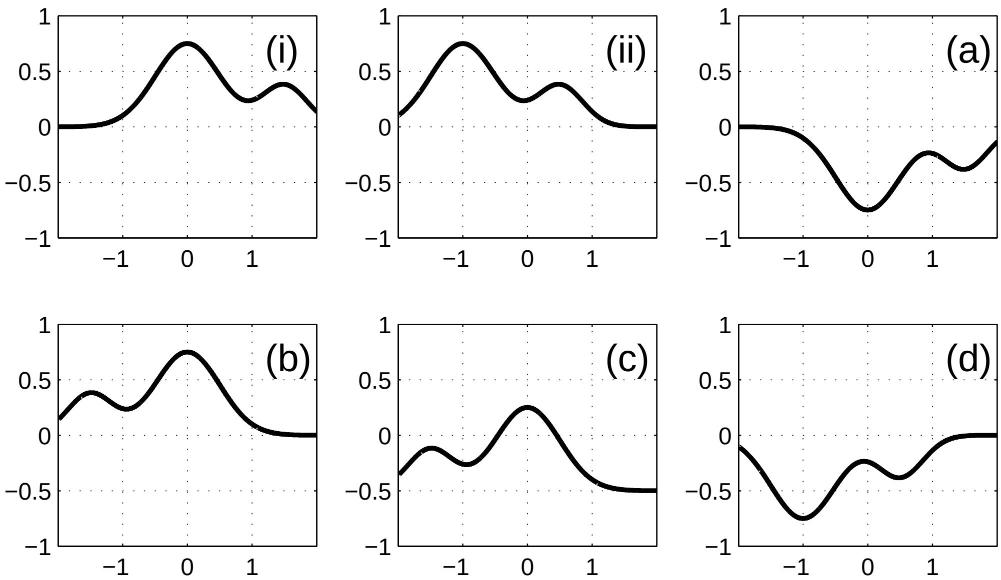
Nachklausur am 31.3.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 91 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+2+2 = 8 Punkte)
Das untenstehende Diagramm (i) zeigt den Graph der Funktion f. Die weiteren Diagramme zeigen jeweils den Graph einer Funktion, die aus f durch Translation und/oder Spiegelung entsteht. Zum Beispiel zeigt (ii) den Graph der Funktion g mit $g(x) = f(x+1)$. Geben Sie analog die Funktionen an, deren Graphen in (a)–(d) zu sehen sind.



Aufgabe 2 (4 Punkte)
Eva und Simon sind zusammen 120 Jahre alt. Vor 20 Jahren war Eva dreimal so alt wie Simon. Wie alt ist Eva jetzt?
Hinweis: Bezeichnen Sie das aktuelle Alter von Eva mit e, das von Simon mit s. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, und lösen Sie dieses.

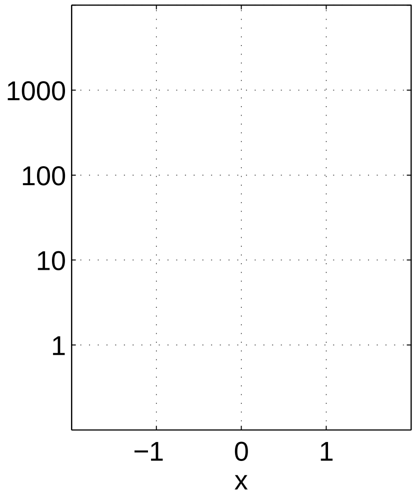
Aufgabe 3 (3+3+3= 9 Punkte)

Übertragen Sie das nebenstehende (einfach logarithmische) Diagramm auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ein.

a) $f_a(x) = \dfrac{10}{10^x}$

b) $f_b(x) = 100 \cdot \sqrt{10^x}$

c) $f_c(x) = 1000 \cdot 10^{-x^2}$



Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Wie Sie aus den Übungen wissen gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,.$$

Bestimmen Sie (damit) die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\tan x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\tan x}$

Aufgabe 5 (5+3 = 8 Punkte)

Sei $f(x) = \cos(\omega x)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $g(x) := 7f(x) + 63f''(x)$.
Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6 (4+4 = 8 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sowie

- $F(x) := f(g(x))$ und
- $G(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Weiter gelte die nebenstehende Wertetabelle.
Bestimmen Sie a) $F'(1)$ und b) $G'(0)$.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	7	1	0	-2
$f'(x)$	0	-1	3	-1
$g(x)$	2	11	2	$-\pi$
$g'(x)$	3	5	π	12

Aufgabe 7 (4+2+2 = 8 Punkte)

Wir betrachten das Leslie-Modell

$$\vec{N}^{(t+1)} = L\vec{N}^{(t)} \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie L^2 und L^4.
b) Bestimmen Sie $\vec{N}^{(4)}$.
c) Bestimmen Sie $\vec{N}^{(-1)}$.

Aufgabe 8 (2+2+10 = 14 Punkte)

Das Nest einer Gnurpe befinde sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die x-Achse zeige Richtung Osten, die y-Achse Richtung Norden. Südlich der x-Achse befinde sich ein Meer, nördlich der x-Achse Land. Die Gnurpe wird 4 km östlich und 3 km südlich des Nests über dem Wasser ausgesetzt. Sie möchte zum Nest zurückfliegen.

Wir nehmen an, dass die Gnurpe beim Flug über kaltes Wasser (fallende Luft) mehr Energie aufwenden muss, um ihre Flughöhe zu halten, als über Land. Beim Flug über Wasser verbrauche sie fünf Energieeinheiten pro km, beim Flug über Land (bzw. am Strand) nur drei.

a) Wieviele Energieeinheiten benötigt die Gnurpe, wenn sie zunächst auf kürzestem Weg zum Strand fliegt, und dann am Stand entlang zum Nest?

b) Wieviele Energieeinheiten benötigt die Gnurpe, wenn sie auf dem kürzestem Weg zum Nest fliegt?

c) Die Gnurpe fliege nun von ihrem Startpunkt geradlinig zum Punkt $(x, 0)$, und von dort am Strand entlang zum Nest.
   (i) Bestimmen Sie die dafür benötigte Energie E als Funktion von x.
   (ii) Welches x muss die Gnurpe wählen, um den Energieverbrauch zu minimieren? Wieviele Energieeinheiten benötigt sie also mindestens für die Heimkehr? Begründen Sie, warum der Energieverbrauch für den von Ihnen bestimmten x-Wert wirklich minimal ist (und nicht z.B. maximal).

Aufgabe 9 (2+2+4+6 = 14 Punkte)

Eine Ente befindet sich am südwestlichen Ufer eines 10 m breiten Flusses. Der Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ m/s nach Südosten. Gegenüber dem umgebenden Wasser bewegt sich die Ente mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ den Geschwindigkeitsvektor der Ente gegenüber dem Ufer, mit $\vec{u}$ ihren Geschwindigkeitsvektor gegenüber dem umgebenden Wasser und mit $\vec{s}$ den Vektor der Fließgeschwindigkeit des Flusses (alles in m/s).

a) Geben Sie $\vec{s}$ an.

b) Geben Sie $|\vec{u}|$ an.

c) Bei ihrem ersten Versuch durchquert die Ente den Fluss so, dass sie sich gegenüber dem Wasser stets genau nach Nordosten bewegt.
   (i) Geben Sie $\vec{u}$ an.
   (ii) Bestimmen Sie $\vec{v}$.

d) Bei einem zweiten Versuch durchquert die Ente den Fluss so, dass Sie sich aus der Luft betrachtet stets genau nach Norden bewegt.
   (i) Geben Sie $\vec{v}/|\vec{v}|$ an.
   (ii) Bestimmen Sie $|\vec{v}|$.

Aufgabe 10 (3+3 = 6 Punkte)

Für einen Martini mischen Sie x Volumeneinheiten (VE) Gin (mit 47% Alkohol) und y VE Wermut (mit 15% Alkohol).

a) Wieviel Prozent Alkohol enthält der Martini?
   HINWEIS: Das Ergebnis ist eine Funktion von x und y.

b) Falls Ihr Martini mindestens dreimal so viel Gin wie Wermut enthält, wieviel Prozent Alkohol enthält er dann mindestens?