Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Koordinaten, Funktionen & Etwas Geometrie

Stefan Keppeler

21. Oktober 2013

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$:
  Angabe eines Paars von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- Punkte im Raum $\mathbb{R}^3$:
  Angabe eines Tripels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, x_3) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- Allgemein (zunächst abstrakt): Punkte im $\mathbb{R}^n$:
  Angabe eines n-Tupels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{wobei} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

Beispiel: Betrachte z.B. die Ergebnisse von 7 Temperaturmessungen an aufeinanderfolgenden Tagen als Punkt im $\mathbb{R}^7$.

Bereiche oder "Figuren" in der Ebene

entsprechen (in Koordinaten)

Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

Umgekehrt können wir Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ graphisch darstellen.

- Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
  z.B. $f_1 : x \mapsto x$ oder $f_2 : x \mapsto 1 - x^2$
  (kurz: $f_1(x) = x$ bzw. $f_2(x) = 1 - x^2$)
- Graph der Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$
  ist Figur in der Ebene
- allgemein: $f : D \to W$ wobei
  D: Definitionsbereich
  W: Wertebereich
  oben: $D = W = \mathbb{R}$ andere Beispiele:
  - Temperatur $T(x, y, z)$ (in °C) an jedem Punkt (x, y, z) des Raumes, d.h. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
  - oder, der Raum ist nur endlich groß (sagen wir quaderförmig), $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$, dann wäre $T : D \to \mathbb{R}$

Geometrische Operationen in der Ebene entsprechen algebraischen Operationen mit den Koordinaten, z.B.

Translation (Verschiebung)	$(x,y) \mapsto (x+u, y+v)$
zentrische Streckung (Vergrößerung)	$(x,y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)\ ,\quad \alpha > 1$
Streckung in x-Richtung	$(x,y) \mapsto (\alpha x, y)\ ,\quad \alpha > 1$
Streckung in y-Richtung	$(x,y) \mapsto (x, \alpha y),\quad \alpha > 1$
Spiegelung an der x-Achse	$(x,y) \mapsto (x, -y)$
Spiegelung an der y-Achse	$(x,y) \mapsto (-x, y)$
Punktspiegelung im Ursprung	$(x,y) \mapsto (-x, -y)$

Alle Operationen sind Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Wie wirkt sich Operation auf Funktionsgraph aus?

Abstand d zweier Punkte $u = (u_1, u_2)\,,\; v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

- Hilfspunkt (u_1, v_2) . . . rechtwinkliges Dreieck
- Satz des Pythagoras liefert

$$d(u,v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}\,,$$

definiert Abstandsfunktion $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Analog im $\mathbb{R}^3$

- Raumdiagonale
- 2 × Pythagoras

$$d(u,v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}\,,$$

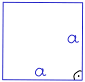
d.h. $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto d(u,v)$.

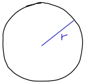
EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Entsprechend definiert man den Abstand zweier Punkte $u, v \in \mathbb{R}^n$ durch

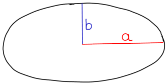
$$
\begin{aligned}
d(u,v) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i)^2} \\
&= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \ldots + (v_n - u_n)^2}
\end{aligned}
$$

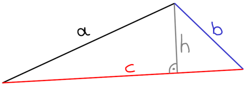
EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

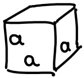


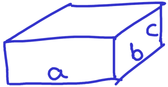


Form	Umfang	Flächeninhalt
Quadrat	$4a$	a^2
Rechteck	$2a + 2b$	ab
Kreis	$2\pi r$	πr^2
Ellipse	keine einfache Formel	πab
Dreieck	$a + b + c$	$\frac{1}{2}ch$

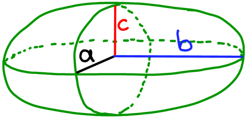


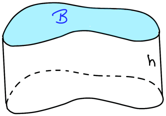


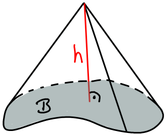




Form	Oberfläche	Volumen (Rauminhalt)
Würfel	$6a^2$	a^3
Quader	$2ab + 2bc + 2ac$	abc
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3} r^3$
Ellipsoid	keine einfache Formel	$\frac{4\pi}{3} abc$
Prisma, Zylinder	$hU + 2B$	hB
Kegel, Pyramide	keine allgemeine Formel	$\frac{1}{3} hB$







EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Beobachtung: Bei einer zentrischen Streckung um einen Faktor $\alpha > 0$ (d.h. $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$ im $\mathbb{R}^2$, bzw. $(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ im $\mathbb{R}^3$) gilt bei allen Objekten

- Weglängen (z.B. Umfang) wachsen[1] um Faktor α
- Flächen wachsen um Faktor α^2
- Volumina wachsen um Faktor α^3

Dies ist formunabhängig!

Anwendung: Bergmannsche Regel
Innerhalb einer Verwandtschaftsreihe sind warmblütige Tiere im kalten Klima großwüchsig.

Erklärung:

[1] bzw. schrumpfen für $0 < \alpha < 1$

Eisbär

♀ 1,90m–2,10m
♂ 2,40m–2,60m

Kragenbär

1,20m–1,80m

Großer Panda

1,20m–1,50m

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- Kreis mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$

$$K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(u,v) = r\}$$

- analog die Kreisscheibe (Radius $r > 0$, Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$)

$$I_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(u,v) \leq r\}$$

- $K_r(u)$ ist Lösungsmenge der Gleichung

$$\begin{aligned} & & d(u,v) &= r \\ &\Leftrightarrow & \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} &= r \\ &\Leftrightarrow & (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

(quadratische Gleichung)

- Betrachte nun v_1 als gegeben und suche f so, dass $v_2 = f(v_1)$, d.h. löse nach v_2 auf:

$$v_2 = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}\,, \qquad |v_1 - u_1| \leq r$$

- Damit ist $K_r(u)$ Vereinigung der Graphen von f_+ und f_-,

$$f_\pm(v_1) = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}\,,$$

beide mit Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - u_1| \leq r\} &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, u_1 - r \leq x \leq u_1 + r\} \\ &= [u_1 - r, u_1 + r] \end{aligned}$$

Kugel mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^3$

- Kugeloberfläche (Sphäre, engl.*sphere*)

$$S_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(u,v) = r\}$$

- Vollkugel (engl. *ball*)

$$B_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(u,v) \leq r\}$$

Sphäre als Funktionsgraph?

- Sphäre ist Lösungsmenge von

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = r^2$$

...auflösen nach v_3

- ... auflösen nach v_3

$$v_3 = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}\,, \quad (v_1, v_2) \in I_r(u_1, u_2)$$

... zwei Funktionen

$$f_\pm(v_1, v_2) = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}$$

mit Definitionsbereich $D = I_r(u_1, u_2)$.

- Damit ist $S_r(u)$ Vereinigung der Graphen

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = f_+(x,y)\,,\ (x,y) \in I_r(u_1,u_2)\right\}$$

und $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = f_-(x,y)\,,\ (x,y) \in I_r(u_1,u_2)\right\}$

Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen inkl. der Null,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$
  die rationalen Zahlen – Brüche bzw. Zahlen mit endlicher oder periodischer Dezimalbruchentwicklung,
- $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen – enthalten zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ Zahlen wie $\sqrt{2} \approx 1{,}414\dots$, $\pi \approx 3{,}141\dots$ oder $\mathrm{e} \approx 2{,}718\dots$, die nicht als Bruch geschrieben werden können.

Bemerkung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$