Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Integration

Stefan Keppeler

13. Januar 2014

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Definition: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ die Ableitung von $F : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, so heißt F Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f.

Beispiel:

Bemerkung: Ist F Stammfunktion von f, so ist auch $F + C$, mit beliebiger Konstante $C \in \mathbb{R}^d$, denn

$$(F + C)' = F' + C' \underset{C'=0}{=} F' = f$$

Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f' = 0$ auf ganz $[a, b]$, so ist f konstant.

Beispiel: Fährt ein Auto mit der Geschwindigkeit Null, so kommt es nicht vom Fleck.

Folgerung: Ist F Stammfunktion von f, so sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}^d$.

Integration als kontinuierliche Summation bzw. Mittelung

Beispiel: Zeitmittel der Temperatur

- $T(t)$: Temperatur an einem Ort zur Zeit t.
- Mittelwert der Temperaturen zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$:

$$\overline{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T(t_i) \qquad \begin{pmatrix} \text{z.B. 12-Uhr-Temperaturen} \\ \text{der letzten Woche} \end{pmatrix}$$

- **Ziel:** Mittel über alle Zeitpunkte im Intervall $[a, b]$:

$$\overline{T} = \frac{\text{Fläche unter } T(t)}{\text{Länge des Zeitintervalls}}$$

(z.B. Durchschnittstemperatur über 24 Stunden)

Anschauliche "Definition":

- Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f \geq 0$, der x-Achse sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ nennen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

das Integral der Funktion f von a bis b.

- Für eine Funktion f, die auch negative Werte annimmt, ist das Integral gerade $A_+ - A_-$, wobei
  - A_+ die Fläche oberhalb der x-Achse und
  - A_- die unterhalb ist.

  In anderen Worten, jedes Flächenstück wird mit dem Vorzeichen von f versehen.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:
Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f = F'$ stetig, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

eine Stammfunktion von f.

Beweisidee:

Bemerkung: Wir schreiben auch $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ (unbestimmtes Integral), falls $F' = f$.

- Integration eines Polynoms

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k \, x^k \, dx = \text{ ?}$$

- $$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \text{ ?} \quad , \qquad \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \text{ ?}$$

- $n \in \mathbb{N}:$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \, \mathrm{d}t = \text{ ?} \quad , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, \mathrm{d}t = \text{ ?}$$

Satz: Seien f und g stetig differenzierbar auf $[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Beweis:

Beispiele:

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x\, \mathrm{d}x =$? , $\displaystyle\int \log x\, \mathrm{d}x =$?
- $n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m:\quad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx)\, \mathrm{d}x =$?

Wiederholung[1]: Satz über Fourierreihen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hübsch[2] und periodisch mit Periodenlänge 2π, dann gibt es reelle Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3 \ldots$ so, dass

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite heißt die Fourier-Reihe von f.

Weiter: Es gilt ($n \geq 1$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\,\mathrm{d}t\,,$$

und $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t\,.$$

[1] vgl. Vorl. 6 Trigonometrie und Vorl. 10 Konvergenz & Stetigkeit
[2] etwas mehr als stetig