Fibonacci-Kaninchen

$F_1 = N$, $F_2 = N$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2N$

$F_4 = 3N$, $F_5 = 5N$ ...

N für Überlegung weniger relevant

Fibonacci-Folge

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$G_t = \alpha^1 G_{t-1} \qquad (G_{t-1} = \alpha G_{t-2})$$

$$= \alpha^2 G_{t-2}$$

$$= \alpha^3 G_{t-3}$$

$$\vdots$$

$$= \alpha^t G_0$$

Bsp: $G_0 = 1$, $\alpha = 2$

t	0	1	2	3	4	5	6	...
G_t	1	2	4	8	16	32	64	...

$\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ ....

$$G_t = 2^t$$

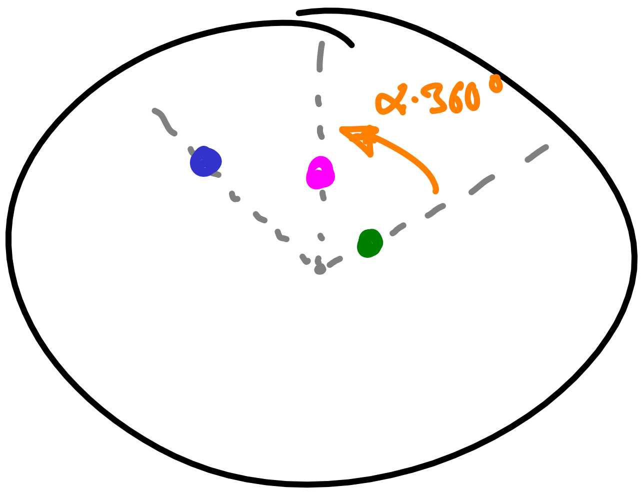
Sparkonto

G_0 , $\alpha = 1{,}03$ (Zeit t in Jahre)

$$G_1 = 1{,}03 \cdot G_0$$

$$G_2 = (1{,}03)^2 G_0 = \underline{1{,}0609}\; G_0$$

mehr als 6%, wg. Zinseszins


α·360°

$A_0 = 0 \quad , \quad \beta = 2$

$A_1 = A_0 + \beta = 2$

$A_2 = A_1 + \beta = 4$

$A_t = t \cdot 2$

A_0 : Guthabe auf Girokonto

$\beta = 850\,€/\text{Monat} - 700\,€/\text{Monat} = 150\,€/\text{Monat}$

$A_t = A_0 + t \cdot 150\,€/\text{Monat}$

in Monaten

Rekursionsvorschrift

$$A_t = A_{t-1} + \beta$$ unsichtbares 1 Monat

---

exp. Wachstum (oder Zerfall) mit variable Faktor α_t

$$G_t = \alpha_t G_{t-1} \qquad (G_{t-1} = \alpha_{t-1} G_{t-2})$$

$$= \alpha_t \cdot \alpha_{t-1} G_{t-2}$$

$$\vdots$$

$$= \alpha_t \cdot \alpha_{t-1} \cdots \alpha_1 \cdot G_0$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right) \cdot G_0 \qquad \left(\text{vgl. } \sum_{s=1}^{t} \beta_s = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_t\right)$$

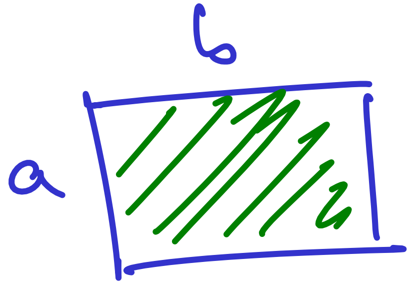
Vergleiche mit exp. Wachstum mit festem $\bar{\alpha}$

$$G_t = \underbrace{\left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right)}_{\overset{!}{=}\ \bar{\alpha}^{t}} G_0$$

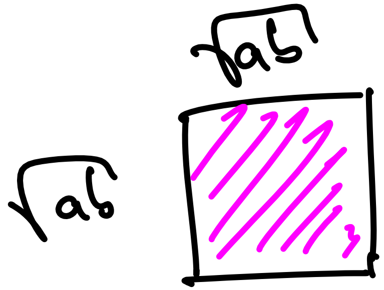
$$\Rightarrow \quad \bar{\alpha} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^{t} \alpha_s} = \left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right)^{1/t}$$

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{G_t}{G_0} \right)^{1/t}$$

Warum geometrisches Mittel?



Rechteck, Fläche $a \cdot b$



Quadrat mit gleicher Fläche
Kantenlänge: geom. Mittel

$\dfrac{a+b}{2}$ arithm. Mittel

größer/kleiner ?

$\sqrt{ab}$ geom. Mittel

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \quad | +2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a+b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Schiff fährt

- die erste 300 km mit 20 km/h, braucht dafür also

$$\frac{300\,km}{20\,km/h} = 15\,h$$

- die zweite 300 km mit 30 km/h, braucht dafür also

$$\frac{300\,km}{30\,km/h} = 10\,h$$

insgesamt: 600 km in 25 h

Durchschnittsgeschw. $\frac{600\,km}{25\,h} = 24\,km/h$

$$\neq \frac{30\,km/h + 20\,km/h}{2} = 25\,\frac{km}{h} \quad \text{(arithm.)}$$

$$\neq \sqrt{30\,km/h \cdot 20\,km/h} \approx 24{,}5\,km/h \quad \text{(geom.)}$$

Das richtige Mittel ist hier das

Harmonische Mittel ← muss man sich aber nicht merken...

von 20 und 30

$$\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = \frac{120}{3+2} = 24$$

der Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j}}$$

Was Lustiges zu Fibonacci

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

z.B. $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5$