Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$n \times m$ - Matrix

Zeile   # Spalten

$n = m$ quadratisch

$n \neq m$ rechteckig

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

Matrix

a_{ij} ← Matrixelement

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

alle gleiche Form (2×3)

$$\xcancel{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

geht nicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times \underline{3}$ $\qquad\qquad$ $\underline{3} \times 4$

Ergebnis: 2×4 $\qquad$ Multiplikation: "Zeile mal Spalte"

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 13 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

$1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0$, $\quad 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 0 + 4 + 12 = 16$

$\cancel{B \cdot A}$ geht nicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

diese Matrix ist symmetrisch

$A \in \mathcal{M}(2,3)$

$$A = \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

TÜ - RT - Bsp

$$\vec{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} 84\,000 \\ 112\,000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Einw. TÜ} \\ \leftarrow \text{Einw. RT} \end{matrix}$$

z. Zt. $t = 0$

ein Jahr später

$$\vec{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}95 \cdot 84\,000 + 0{,}1 \cdot 112\,000 \\ 0{,}05 \cdot 84\,000 + 0{,}9 \cdot 112\,000 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}}_{= W} \vec{N}^{(0)}$$

Fibonacci - Kaninchen

einmonatige & zweimonatige Kaninchen $\quad \vec{N}^{(t)} = \begin{pmatrix} N_1^{(t)} \\ N_2^{(t)} \end{pmatrix}$

einmonatige kriegen Junge (& werden zweimonatig)

zweimonatige —— " —— (& sterben)

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)}$$

$$N_2^{(t+1)} = N_1^{(t)}$$

$$\vec{N}^{(t+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \text{Leslie-Matrix}} \vec{N}^{(t)}$$

erweitertes Modell

10% der einmonatig K. sterben

30% der zweimonatig K. werden dreimonatig & bekommen Junge

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)} + \underline{N_3^{(t)}}$$

$$N_2^{(t+1)} = \underline{0{,}9} \cdot N_1^{(t)}$$

$$\underline{N_3^{(t+1)}} = \underline{0{,}3 \cdot N_2^{(t)}}$$

$$\vec{N}^{(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \vec{N}^{(t)} \quad , \quad \vec{N}^{(t)} = \begin{pmatrix} N_1^{(t)} \\ N_2^{(t)} \\ N_3^{(t)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$A \cdot B$ ist 2×2-Matrix

$B \cdot A$ ist 3×3-Matrix

---

auf ÜB-Blatt: Matrix $A \neq 0$ aber $A \cdot A = 0$

A ist nicht invertierbar

Annahme: es gilt A^{-1} mit $A^{-1} \cdot A = I$:

$$A \cdot A = 0 \quad \Big| \; A^{-1} \cdot$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= I} \cdot A = 0 \iff A = 0 \quad ⚡ \text{ zu } A \neq 0$$

Sei $BA = I = AB$ sowie $CA = I = AC$

$$BA = I \quad | \cdot C$$

$$\underbrace{B\underbrace{AC}_{=I}}_{=B} = \underbrace{I \cdot C}_{=C}$$

d.h. $B = C$

Potenza: $L^1 = L$, $L^0 = I$

quadratische Matrix