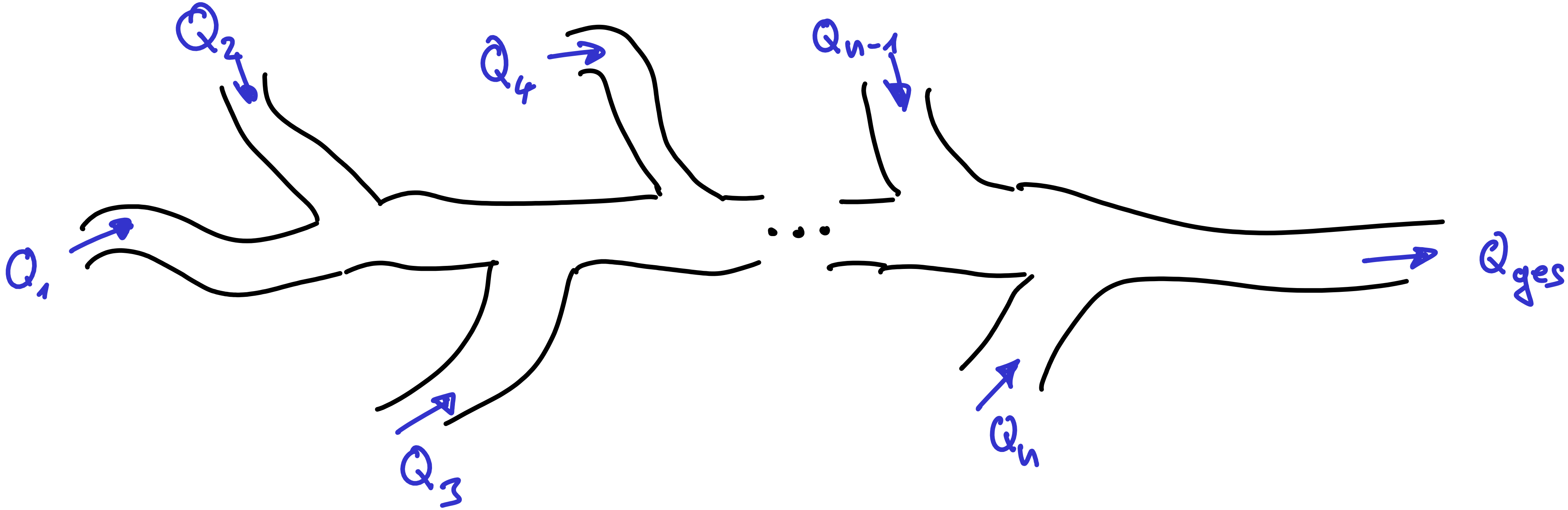


Messe Konzentration von z.B. Na^+, K^-, NO_3^-, NO_2^-, HSO_4^-, Pb^{2+}, Cd^{2+}, ...

in Zuflüsse & im Abfluss

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q_{ges}$$

$$c_1^{Na^+} Q_1 + c_2^{Na^+} Q_2 + \dots + c_n^{Na^+} Q_n = c_{ges}^{Na^+} Q_{ges}$$

für k Stoffe $\rightsquigarrow$ k+1 Gleichungen
für n Unbekannte

hoffe auf eindeutige Lösung für $k+1 = n$

(oder evtl. besser: überbestimmt, d.h. $k+1 > n$ ... Näherungslös.)

geschickt: $x_j = \frac{Q_j}{Q_{ges}}$ (teile alle Glu. durch Q_{ges} → LGS für die x_j)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$c_1^{Na^+} x_1 + c_2^{Na^+} x_2 + \dots + c_n^{Na^+} x_n = c_{ges}^{Na^+}$$

$$\vdots$$

$\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1^{Na^+} & c_2^{Na^+} & \dots & c_n^{Na^+} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ c_{ges}^{Na^+} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ c_1^{Nat} & c_2^{Nat} & \cdots & c_n^{Nat} & c_{ges}^{Nat} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad 5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 37/12 & -37/6 & 37/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{2}{3} \\ \mid \cdot \frac{12}{37} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ -1 \\
\end{array}
\\
\hline
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

ausgeschrieben

$$x_1 + x_2 + \frac{3}{4} x_3 - \frac{1}{2} x_4 = 4$$

$$x_3 - 2 x_4 = 4$$

nenne z.B. $x_4 = t$ und $x_2 = s$ $\quad (t, s \in \mathbb{R}$ beliebig$)$

$$x_3 = 4 + 2t$$

$$x_1 = 4 + \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}(4 + 2t) - s$$

$$= 1 - t - s$$

allg. Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

---

z.z.: $L_{\vec{0}}$ ist Unterraum

- $L_{\vec{0}} \subseteq \mathbb{R}^m$ (m : # Variablen)
- Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Lösungen des LGS, d.h. $\vec{u}, \vec{v} \in L_{\vec{0}}$

$\Leftrightarrow A\vec{u} = \vec{0}$ und $A\vec{v} = \vec{0}$

Ist $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig auch Lösung?

$$A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \cdot \underline{A \cdot \vec{u}} + \beta \cdot \underline{A \cdot \vec{v}} = \alpha \cdot \vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \quad \square$$

2.2 $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff \vec{x} = \hat{u} + \vec{y}\,,\ \vec{y} \in L_{\vec{0}}$

($\vec{u}$ war fest vorgegeben)

"$\Leftarrow$" $\vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$

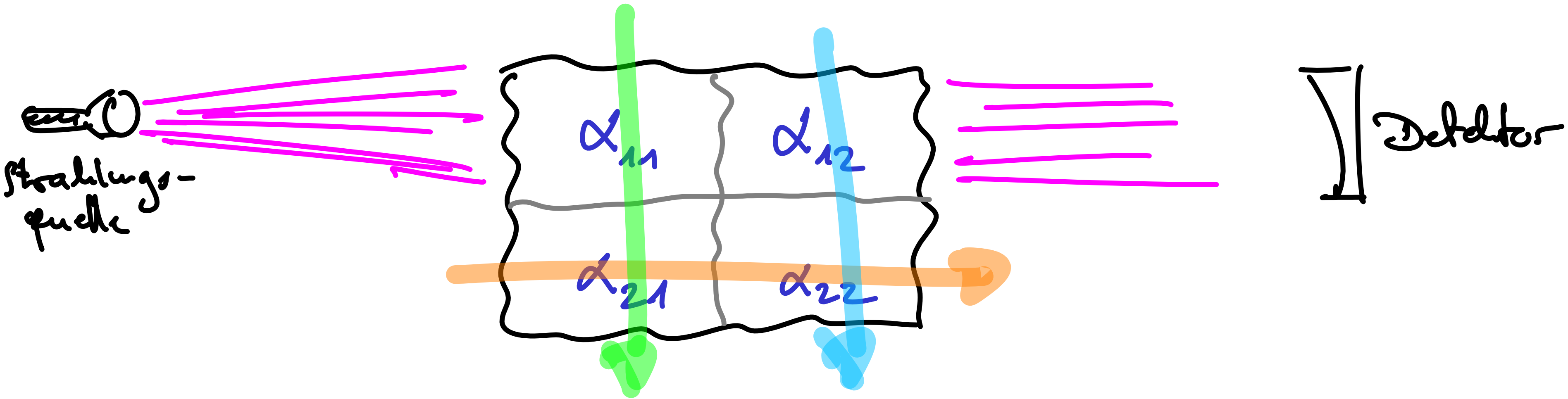
$\Rightarrow A\vec{x} = A\vec{u} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$ ☺

"$\Rightarrow$": $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff A\vec{x} = \vec{b}$ (wir wissen $A\hat{u} = \vec{b}$)

$\vec{y} := \vec{x} - \vec{u}$

$A\vec{y} = A\vec{x} - A\vec{u} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, d.h. $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$ ☺

Tomographie



Intensität $\quad I_0 \rightsquigarrow I = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} \cdot I_0$

$$\underbrace{\lambda_1}_{\text{gemessen}} = \frac{I}{I_0} = \underbrace{\alpha_{11} \cdot \alpha_{12}}_{\text{gesucht}}$$

, , : weitere Gleichungen für Produkte von αs

Logarithmieren: $\quad \log \lambda_1 = \log \alpha_{11} + \log \alpha_{12}$

$\rightsquigarrow$ 4 Gleichungen für $\log \alpha_{11}$, $\log \alpha_{12}$, $\log \alpha_{21}$, $\log \alpha_{22}$

s_A = # Schwestern von Anton

s_B = # —"— Berta

b_A = # Brüder von Anton

b_B = # —"— Berta

$$\left.\begin{aligned} s_A &= s_B + 1 \\ b_B &= b_A + 1 \end{aligned}\right\}$$ "... sind Geschwister"

$$s_A = 2 b_A$$

$$s_B = b_B$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ b_A \\ b_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_A - s_B &= 1 \\ b_A - b_B &= -1 \\ s_A - 2b_A &= 0 \\ s_B - b_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_A \\ s_B \\ b_A \\ b_B \end{pmatrix}$$

d.h. $b_B = 3$ ← letzte Zeile

$b_A = b_B - 1 = 2$ ← 3. Zeile

$s_D = 2 b_A - 1 = 3$ ← 2. Zeile

...

$\Rightarrow$ 7 Kinder in der Familie