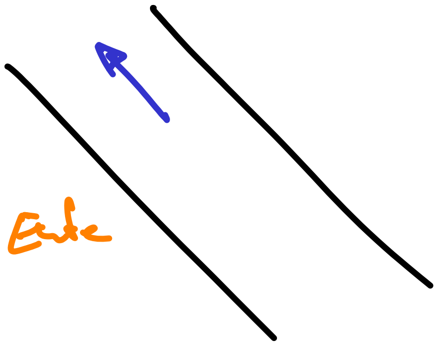
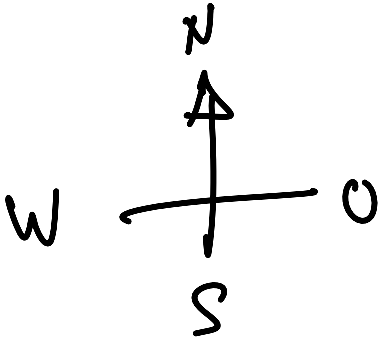
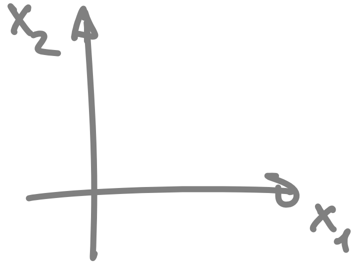
Nachklausur 11/12

$\boxed{1}$







a) $\vec{s} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Länge } 1}$

$\left(\sqrt{2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \right)$

b) $|\vec{u}| = 1$

c) (i) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \vec{s} + \vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

(ii) 10 s da sie 10 m mit $1\,\frac{m}{s}$ zurücklegt

(dass sie abgetrieben wird ist ihr egal)

(iii)

$$10\,s \cdot \frac{1}{2}\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{5\,m}}$$

so lange ist sie im Wasser

so wird sie abgetrieben

d) (i)

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{s} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} - \vec{s} \Rightarrow |\hat{u}|^2 = |(\vec{v} - \vec{s})|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = |\vec{v}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2\,\vec{v}\cdot\vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = |\vec{v}|^2 + \frac{1}{4} - \cancel{2}\,\frac{|\vec{v}|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = |\vec{v}|^2 + \frac{1}{4} - \frac{|\vec{v}|}{2}\cdot 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{v}|^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

(iii)

$$10\,\mathrm{m} \Big/ \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = \frac{20}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s} = \frac{20}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{s}$$

Nachklausur 11/12

$\boxed{3}$

$$\vec{x}^{(t+1)} = L \cdot \vec{x}^{(t)}$$

a) $$x_1^{(t+1)} = \cancel{\frac{4}{5} x_2^{(t)}}$$

$$x_2^{(t)} + \frac{1}{2} x_3^{(t)}$$

Demokratie

$$\begin{pmatrix} x_1^{(t+1)} \\ x_2^{(t+1)} \\ x_3^{(t+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1^{(t)} + 1 \cdot x_2^{(t)} + \frac{1}{2} x_3^{(t)} \\ \frac{4}{5} x_1^{(t)} \\ \frac{1}{2} x_2^{(t)} \end{pmatrix}$$

b)

$$L \cdot \vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 4000 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

also LGS

gesucht

$$(*) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 7500 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 4000 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2500 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_3^{(0)} = 2 \cdot \left(7500 - x_2^{(0)}\right) = 5000$$

$$\Rightarrow x_1^{(0)} = \frac{5}{4} \cdot 4000 = 5000$$

$$\Rightarrow x_2^{(0)} = 5000$$

$$(*) \quad 0 \cdot x_1^{(0)} + 1 \cdot x_2^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot x_3^{(0)} = 7500$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

c)

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = L
$$

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} = L^2
$$

d)

$$\vec{x}^{(2)} = L \cdot \vec{x}^{(1)}$$

$$\vec{x}^{(3)} = L \cdot \vec{x}^{(2)} = L \cdot L \cdot \vec{x}^{(1)} = L^2 \cdot \vec{x}$$

ausrechnen

e)

$$L\vec{x} = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= x_1 \\
\tfrac{4}{5}x_1 &= x_2 \\
\tfrac{1}{2}x_2 &= x_3
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{4}{5}x_1 - x_2 \phantom{+ \tfrac{1}{2}x_3} &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

in Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{4}{5} \quad | \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{5}{2} \quad | \cdot (-5) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Zeile $\quad x_2 - 2x_3 = 0$

wähle $x_3 = t$ beliebig $\Rightarrow x_2 = 2t$

1. Zeile

$$x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2}t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad , \; t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

(ii) $\quad x_2 \overset{!}{=} 5000 \quad$ d.h. wähle $t = 2500$, damit

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 6250 \\ 5000 \\ 2500 \end{pmatrix}$$