Nachklausur 12/13

$\boxed{4}$ a)

$$p = \sqrt{250^2 - 150^2}\ \text{km}$$
$$= \sqrt{62500 - 22500}\ \text{km}$$
$$= \sqrt{40000}\ \text{km} = 200\ \text{km}$$

b)

$$\frac{250\ \text{km}}{60\ \text{km/h}} = \frac{25}{6}\ \text{h} = 4\ \text{h}\ 10\ \text{min}$$

c)

$$\frac{150\ \text{km}}{60\ \text{km/h}} + \frac{200\ \text{km}}{100\ \text{km/h}} = \frac{5}{2}\ \text{h} + 2\ \text{h} = 4\ \text{h}\ 30\ \text{min}$$

d)

$$\frac{\sqrt{x^2 + (150\ \text{km})^2}}{60\ \text{km/h}} + \frac{\overset{200\ \text{km}}{p} - x}{100\ \text{km/h}} =: t(x)$$

x in km t in h:

$$t(x) = \frac{\sqrt{150^2 + x^2}}{60} + \frac{p - x}{100}$$

$$t'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{60\sqrt{150^2+x^2}} - \frac{1}{100} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\overset{3}{\cancel{60}}}{\underset{5}{\cancel{100}}}\sqrt{150^2+x^2} \qquad \Big|\cdot\frac{5}{3} \quad \Big|\uparrow 2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 150^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16}{9}x^2 = 150^2 \qquad \Big|\text{ Wurzel ziehen, pos. W. da } x>0$$

$$\Leftarrow \quad \frac{4}{3}x = 150 \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4}\cdot 150 = 112{,}5 = \frac{225}{2}$$

Das Fzg. sollte an der Stelle $x = 112{,}5$ km auf die Piste fahren.

wirklich? Könnte eigentlich auch Max. oder sonstwas sein – wir suchen aber ein Minimum.

$$t\left(\frac{225}{2}\right) = \frac{\sqrt{150^2 + \frac{225^2}{4}}}{60} + \frac{200 - \frac{225}{2}}{100}$$

$= 4$ (laut Matlab auf Aufgabenblatt)

kleiner als Ergebnisse aus (b)+(c)
also wirklich Minimum

e) $4h < 4h\ 10min < 4h\ 30min$

(d) (b) (c)

Nachklausur 12/13

$\boxed{5}$ a) (i) $x+y \geq 2{,}5$

(iii) $y \leq 2$

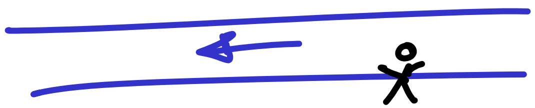
Gesamtvolumen Alkohol

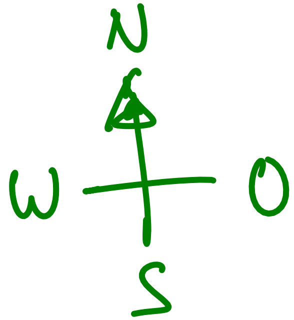
(ii) $\frac{x \cdot 0{,}4}{x+y} \leq \frac{2}{10}$

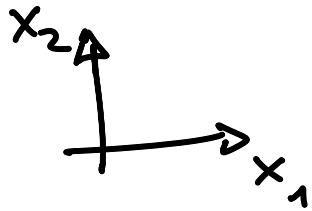
Gesamtvolumen Drink

Klausur 11/12

$\boxed{1}$







a) $\vec{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Test $|\vec{s}| = \begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Warum taucht in andere Aufgabe so oft $\frac{1}{\sqrt{2}}$ auf?

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \leftarrow$ dieser Vektor hat Länge

$$\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

d.h. der Vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ zeigt in die gleiche Richtung wie $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, hat aber Länge 1.
(D.h. ist ein Einheitsvektor)

b) $|\vec{u}| = 1$

c) (i) $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

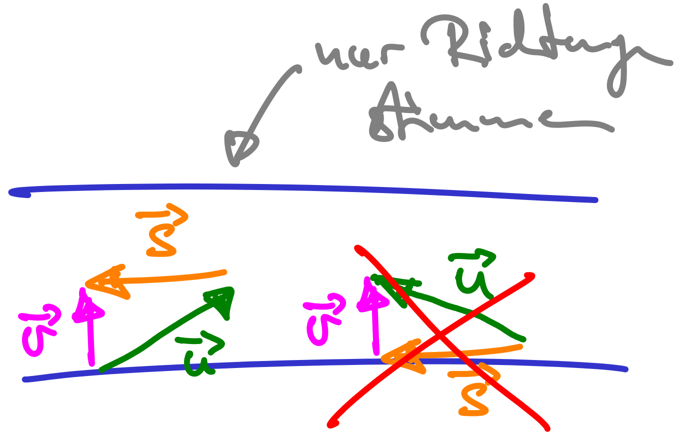
$$\vec{v} = \vec{s} + \vec{u} = \begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$

(ii) 10 s (da er pro Sekunde einen Meter weiter nach Norden kommt)

(iii) 5 m

d) (i) $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\cancel{|\vec{v}|^2 = |\vec{s}|^2 + |\vec{u}|^2}$



$\rightarrow$ $|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{s}|^2$

$$\vec{u} + \vec{s} = \vec{v}$$

also $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

---

eigentlich nur Vektoren

$\vec{u} + \vec{s} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{s}|$

aber wir kennen $\vec{u}$ nicht, sondern nur $|\vec{u}|$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{u} = \hat{v} - \hat{s}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|\hat{u}|}_{=1} = \underbrace{|\hat{v} - \hat{s}|}_{= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |\vec{v}| - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \left| \begin{pmatrix} 1/2 \\ |\vec{v}| \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + |\vec{v}|^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4} + |\vec{v}|^2 \quad \underset{|\vec{v}|>0}{\Longrightarrow} \quad |\vec{v}| = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus $\vec{v} = \vec{u} + \vec{s}$ folgt i. A.

<u>nicht</u> $|\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{s}|$, und auch

<u>nicht</u> $|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{s}|^2$

(iii) $$\frac{10\,m}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{m}{s}} = \frac{20}{\sqrt{3}}\,s = \frac{20}{3}\sqrt{3}\,s$$

Klausur 13/14

$\boxed{6}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{5\cdot 0{,}4}^{=2} & \overbrace{15\cdot 0{,}4}^{=6} & \overbrace{4}^{=10\cdot 0{,}4} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

e) $$\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 20\%$$

ersetze immer 40% aus (a) d.h. (e) durch 20%

$$\frac{1}{25}$$

5 Eier · 80% = 4 Eier davon 1 weibliches

daher 2 → 1

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ $f(\vec{x}) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + 3z^2}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) $$(\nabla f)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+3z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$$

NR: $$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2+3z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{\ldots}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{6z}{\sqrt{\ldots}}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0)$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0^2+0^2+3\cdot 1^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot(-1)\right)$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Nachklausur 9/10

$\boxed{6}$

a) $W = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}02 \\ 0 & 0{,}88 & 0{,}02 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}96 \end{pmatrix}$, $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Frau} \\ \leftarrow \text{Männer} \\ \leftarrow \text{Kinder} \end{matrix}$

b)

$W\hat{x} = \vec{x}$ ist LGS

$$\begin{aligned} 0{,}9x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 0{,}02x_3 = x_1 \\ 0{,}88x_2 &+ 0{,}02x_3 = x_2 \\ 0{,}2x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 0{,}96x_3 = x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}1x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 0{,}02x_3 = 0 \quad &&| \cdot 100 \\ -0{,}12x_2 &+ 0{,}02x_3 = 0 \quad &&| \cdot 100 \\ 0{,}2x_1 \qquad\qquad\qquad &- 0{,}04x_3 = 0 \quad &&| \cdot 100 \end{aligned}$$

Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 2 & 0 \\ 20 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad 2 \quad \Big| \cdot \frac{(-1)}{10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3 beliebig

2. Zeile legt x_2 fest: $-12x_2 + 2x_3 = 0$

$\iff x_2 = +\frac{1}{6}x_3$

3. Zeile legt x_1 fest: $x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0$

$\iff x_1 = \frac{1}{5}x_3$

d.h. Gleichgew.-Population sehen so aus

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

c) stationäre Pop. mit 6 Mio. Frauen, wieviele Kinder?

30 Mio. (da 5x so viele wie Frauen)