

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 08.11.2013)

Aufgabe 17

(20 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und für $n \geq 3$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Bestimmen Sie a_j für $j = 1, 2, \dots, 10$.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

b)
$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu = a_{n+2} - 1 \quad \forall n \geq 1$$

c)
$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 2$$

d)
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+^n - \alpha_-^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ wobei } \alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst, dass $\alpha_\pm + 1 = \alpha_\pm^2$ gilt.

Aufgabe 18

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen sie mithilfe der Definition der Konvergenz von Folgen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{1 - n^2} = -2, \quad \text{d.h. finden Sie ein geeignetes } N(\varepsilon).$$

Aufgabe 19

(10 Punkte)

Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte.

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} \left(\frac{3n^3 + 3n^2 - 1}{n^2} - 3n \right) \right)$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+n^2} - \sqrt{-2n+n^2} \right)$$

Aufgabe 20

(10 Punkte)

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a)
$$\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{1}{\mu+1}$$

b)
$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{x^\mu \nu}{\mu(\mu+1)}$$

HINWEIS: Kennzeichnen Sie in der $\mu\nu$ -Ebene jeweils alle Paare (μ, ν) , über die in $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \dots$ bzw. in $\sum_{\mu=0}^n \sum_{\nu=0}^{\mu} \dots$ summiert wird. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 21

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten $\gamma_{n\nu\mu}$ in

$$(a + b + c)^n = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \gamma_{n\nu\mu} a^\nu b^{\mu-\nu} c^{n-\mu}.$$

HINWEIS: Verwenden Sie die binomische Formel.

Aufgabe 22

(9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 15.12.13 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Two-sided limits from graphs*,
- *One-sided limits from graphs* und
- *Two-sided limits using advanced algebra*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).