

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 15.11.13)

---

### Aufgabe 23

(10 Punkte)

Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte!

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 - 3x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 - 3x}$     c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{\pi - x}$     d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}$

### Aufgabe 24

(10 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$     b)  $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$     c)  $f(x) = |x^2 - 1|$     d)  $f(x) = x|x|$

### Aufgabe 25

(10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^9 - 512}{x - 2}$     b)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{64 + x^3}{2x + 8}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^n}{x - 1}$  für  $n \in \mathbb{N}$

### Aufgabe 26

(10 Punkte)

Sei  $P(x)$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ , d.h.

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie  $P^{(\nu)}(x)$ , d.h. die  $\nu$ te Ableitung von  $P$ .  
HINWEIS: In Abschnitt 4.5 haben wir die  $k$ te Ableitung von  $x^n$  berechnet.
- b) Sei weiter  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Zeigen Sie:

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{P^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu.$$

### Aufgabe 27

(10 Punkte)

Wie Sie wissen gilt beim Ableiten die Produktregel  $(fg)' = f'g + fg'$ . Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n-\nu)}(x).$$

ZUR ERINNERUNG:  $f^{(k)}(x)$  ist die  $k$ te Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$ , d.h.  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  etc.

HINWEIS: Führen Sie eine vollständige Induktion nach  $n$  durch, und werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

### Aufgabe 28

(12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 15.12.13 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Derivative intuition*,
- *Graphs of functions and their derivatives*,
- *The formal and alternate form of the derivative* und
- *Derivatives 1*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).