Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 22.11.2013)

Aufgabe 29 (10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen stetig, stetig fortsetzbar (und wie?) bzw. unstetig?

a) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 - 2x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{(x+1)(x+2)}$

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 - 2x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{(x+1)(x+2)}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 + 1}}{x + 2}$

Aufgabe 31 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$\mathrm{e}^{1-n} < \frac{n!}{n^n} \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir dass $(1 + \frac{1}{n})^n < \mathrm{e}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Schätzen Sie $n!$ mithilfe von (a) nach unten ab, und vergleichen Sie mit der Stirlingschen Formel.

Aufgabe 32 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n/2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n-3}\right)^{n+1}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 33 (10 Punkte)
Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

a) Für welche x sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 34 (10 Zusatzpunkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^k f(x) = o\big((x - x_0)^{n+k}\big)$$

Dafür schreiben wir auch kurz $(x - x_0)^k\, o\big((x - x_0)^n\big) = o\big((x - x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ sowie $f(x) = o\big((x - x_0)^n)\big)$ und $g(x) = o\big((x - x_0)^m\big)$. Zeigen Sie[1]

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x - x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x - x_0)^n\big) \;+\; o\big((x - x_0)^m\big) \;=\; o\big((x - x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (siehe Lemma 4).

Aufgabe 35 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 15.12.13 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Limits at infinity where x is unbounded* und
- *Limits at infinity where f(x) is unbounded*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).

[1] Dabei ist $\min(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2, 0, 1, 3) = 0$.