Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 29.11.2013)

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$ (vgl. Aufgabe 33).

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun sinh, cosh und tanh. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei a und c ist dies eindeutig – bei b sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$.

Bemerkung: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 36.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Die Funktion f sei definiert durch

$$\log^2(f(x)) + \log(f(x)) + x = \pi f(x)\,. \qquad (*)$$

Weiter sei $x_0 := f^{-1}(1)$.

a) Bestimmen Sie x_0.
b) Berechnen Sie $f'(x_0)$.

Hinweis zu (b): Leiten Sie $(*)$ nach x ab und lösen Sie nach der gesuchten Größe auf.

Aufgabe 40 (10 Punkte)

a) Sei $f(x) = 2^x$. Bestimmen Sie $f'(x)$. HINWEIS: $a^x = \mathrm{e}^{x \log a}$.

b) Seien $0 < p_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, mit $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, sowie

$$S(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{j=1}^{n} {p_j}^{\alpha} \right)$$

Bestimmen Sie $\lim_{\alpha \to 1} S(\alpha)$. HINWEIS: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

Aufgabe 41 (9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 19.01.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Inverses of functions*,
- *Operations with logarithms* und
- *Fractional exponents 2*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).