

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 06.12.2013)

Aufgabe 42

(10 Punkte)

Aus Aufgabe 37 wissen wir, dass $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Zeichnen Sie den Graphen von Artanh . Bestimmen Sie dann $\operatorname{Artanh}(x)$ explizit.

HINWEIS: Das Ergebnis lässt sich in der Form $\alpha \log(P(x)/Q(x))$ mit Polynomen P und Q sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ schreiben.

Aufgabe 43

(10 Punkte)

- a) Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die Ableitung.

$$f_1(x) = x^{13}e^x, \quad f_2(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2 + e^{-x}}, \quad f_3(x) = \log_{13}(x), \quad f_4(x) := x^x.$$

- b) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ sowie $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.

HINWEIS: Denken Sie an die l'Hospital'sche Regel.

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Sei $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$.

- a) Zeigen Sie: $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

HINWEIS: Verwenden Sie das Additionstheorem für \cos , um $T_{n \pm 1}$ umzuschreiben.

- b) Berechnen und zeichnen Sie T_ν für $\nu = 0, 1, 2, 3$.

HINWEIS: Berechnen Sie zunächst T_0 und T_1 und verwenden Sie dann Teil a.

- c) Zeigen Sie, dass T_n der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

genügt, d.h. berechnen Sie T_n' und T_n'' , und setzen Sie ein.

HINWEIS: $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Aufgabe 45

(20 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall |x| < 1.$$

Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\frac{1}{1+x}$ b) $\frac{1}{1-2x}$ c) $\frac{1}{x-13}$ d) $\frac{1}{7-x^2}$ e) $\frac{1+x}{1-x}$

Aufgabe 46

(3 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 19.01.14 auf www.khanacademy.org die *Skill*

- *Geometric series of constants.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).