Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 13.12.2013)

Aufgabe 47 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?
Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung.

Aufgabe 48 (20 Punkte)
Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\frac{e^x - 1}{x}$ b) $\frac{1}{(2-x)(4-x)}$ c) $\frac{\cos x}{1-x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihen von

d) $\frac{1}{1+x}$ um $x_0 = \pi$ und e) $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 49 (10 Punkte)
Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos(2x)-1)^3}{x^4 \sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{2013}(-x)}{x^{13}(e^x - 1 - x)^{1000}}$

Aufgabe 50 (10 Punkte)
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{\sqrt{1-2x^2}}{1-ax^4}\, e^{-bx^2}$$

bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Belegen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 51 (Extremwert-Test) (10 Zusatzpunkte)
Eine Funktion f sei auf dem Intervall $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar und es gelte für $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Implikationen gelten:
(i) n ist ungerade $\Rightarrow$ x_0 ist keine Extremalstelle.
(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Maximalstelle.
n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Minimalstelle.

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{in einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

Hinweise: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0\ \forall\, \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0 (warum?).

Aufgabe 52 (12 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 19.01.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Evaluating logarithms 2*,
- *Graphs of sine and cosine*,
- *Pythagorean identities* und
- *Creating power series from geometric series using algebra*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweis: (i) Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2). (ii) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.