Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

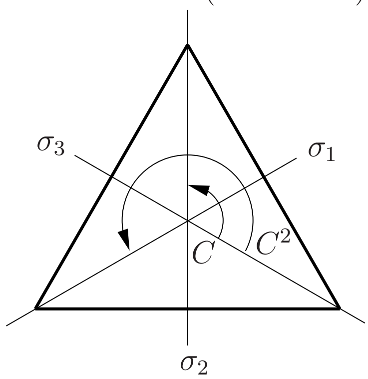
Übungsblatt 10 (Abgabe am 20.12.2013)

Aufgabe 53 (10 Punkte)
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x|x| - 3 + x - x^2}{|x| - 1}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 54 (10 Punkte)
Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Ist die Gruppe abelsch?



Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, wo wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 55 (10 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$, aber modulo N, d.h. wir identifizieren N mit 0, $N+1$ mit 1 und so weiter. Zeigen Sie:

a) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ist ein Körper.
b) $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$ ist kein Körper.
c) Ist N keine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_N, +, \cdot)$ kein Körper.

Aufgabe 56 (10 Punkte)
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}$.

Aufgabe 57 (10 Punkte)
Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Zeigen Sie:

a) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Hinweis: Nehmen Sie in Teil b an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!