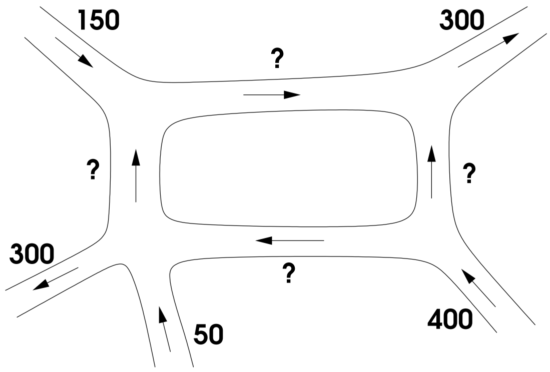
Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 10.01.2014)

Aufgabe 58 (10 Punkte)
Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Staßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Staßen im Uhrzeigersinn mit $x_1, \dots, x_4$ beginnend mit der unteren.

Aufgabe 59 (10 Punkte)
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über$K$?[2] Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2 = -x_1\,,\ 2x_1 + x_3 = 3x_2 \right\} \quad , \qquad K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq 5\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 5 und Steigung Eins im Ursprung $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 60 (10 Punkte)
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Stellen Sie, falls möglich, $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

[2] Überprüfen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M\ \forall\ \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)

Aufgabe 61 (10 Punkte)

$V := \operatorname{span}(1, \sin(x), \cos(x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 57). Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 62 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 + 3a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2b_2 - a_1b_1$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!