Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 17.01.2014)

Aufgabe 63 (10 Punkte)
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 6$ und $\dim V = 5$ sowie Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_6$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_5$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_6, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_5\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_j$)!

Aufgabe 64 (10 Punkte)
a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 62e. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 65 (10 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum $C([-1,1])$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ (vgl. Aufgaben 57 & 61). Sei $f_n(x) = x^n$. Offensichtlich gilt $f_n \in C([-1,1]) \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Auf $C([-1,1])$ sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, mit

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1 + (-1)^{n+m}}{n+m+1} \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 .$$

a) Berechnen Sie $\langle f_2 - f_1, 2f_3 + 7f_0 \rangle$.

Sei $U := \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.
c) Bestimmen Sie $\dim U$.
d) Sei $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ die Basis aus Teil b. Zeichnen Sie die Funktionen P_0, P_1, P_2 und P_3 auf dem Intervall $[-1,1]$.

Aufgabe 66 (10 Punkte)
Betrachten Sie das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 .$$

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschießend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
b) Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3.
c) Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit Sie mithilfe der Formeln aus a und b wirklich die Lösung des LGS erhalten?