Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 24.01.2014)

Aufgabe 67 (10 Punkte)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$2x_3 - 7x_2 = 5 + 3x_1 \,.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1 aus Teil a.

Aufgabe 68 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \, \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \, \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 69 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie jeweils die Geschwindigkeit sowie deren Betrag:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + \cos(2t))\cos t \\ (\frac{3}{2} + \cos(2t))\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{y}}(0)$, $\dot{\vec{y}}(\frac{\pi}{2})$, und $\dot{\vec{y}}(\pi)$ als Tangentialvektoren ein.

Aufgabe 70 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

a) $(3,4)$ b) $(4,-3)$ c) $(-2,1)$ d) $(-1,-2)$

Geben Sie die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) an:

e) $(\pi,0,0)$ f) $(0,1,0)$ g) $(5,0,5)$ h) $(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1)$

Aufgabe 71 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Hinweis: Assoziativität ist hilfreich.

Aufgabe 72 (9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 2.2.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Defined and undefined matrix operations*,
- *Multiplying a matrix by a vector* und
- *Multiplying a matrix by a matrix*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweisw: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).