Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 14 (Abgabe am 31.01.2014)

Aufgabe 73 (10 Punkte)
Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,, \ \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\mathrm{e}^{Ax} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2. Folgern Sie daraus wie A^{2n} und A^{2n+1} aussehen. (ii) Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 74 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad AX = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad AY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$, X, oder Y bestimmen können, ohne zunächst A^{-1} zu berechnen?

Aufgabe 75 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^5$

Hinweis: Zur Definition von A^n siehe Aufgabe 73.

Aufgabe 76 (10 Zusatzpunkte)

Seien $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0 \neq \det B$ gegeben. Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die $(AB\vec{x}) \cdot (AB\vec{x}) + \vec{c}^2 = -2\,\vec{c} \cdot (AB\vec{x})$ erfüllen.

Aufgabe 77 (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: $(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), \cdot)$ mit

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A \neq 0 \right\}$$

und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 78 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 2.2.14 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Determinant of a 3x3 matrix* und
- *Inverse of a 3x3 matrix.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

Hinweisw: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).