Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 15 (keine Abgabe, Besprechung auszugsweise im SS 14)

Aufgabe 79
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $A\vec{e}_1$ und $A\vec{e}_2$, wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Was bewirkt also die Anwendung von A auf $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$? Schließen Sie daraus auf die Wirkung von A auf beliebige Vektoren $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$.
b) Berechnen Sie $\det A$.
c) Bestimmen Sie $A^2 = AA$ und A^{-1}. Hinweis: Nicht rechnen!

Aufgabe 80
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{10+40\mathrm{i}}{5\mathrm{i}-3}$ b) $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\pi/2}$ c) $\cos(x+\mathrm{i}y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 81
a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 = -27$. Markieren Sie diese z in einer Skizze der komplexen Ebene.
b) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

i) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \cos(\nu x)$ ii) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} \binom{\nu}{\mu} 2^{-\nu}\cos(\nu x)$

Aufgabe 82
Bestimmen Sie bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^4$ eine orthonormierte Basis des Unterraums $U \subset \mathbb{C}^4$ gegeben durch

$$U := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 83
Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$, $\det(\overline{A^T})$ und $\det(\overline{A^T}A)$.