Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 12.02.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall n \geq 2$.

a) Bestimmen Sie a_2, a_3 und a_4.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 2\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi} \frac{x^7+\pi^7}{\pi+x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)} - \mathrm{e}^x\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \big(\log(x^5+6x) - \log(x^2+3x+x^5)\big)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \log x}{2x^2-7x^3}$ f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\pi}{n}\right)^{5-n}$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu$ c) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} \binom{\nu}{\mu} 3^{\nu-\mu} (-1)^\mu$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

a) Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

(i) $\displaystyle\frac{x}{4-x^2}$ (ii) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}$ (stetig fortgesetzt bei Null) (iii) $\displaystyle\frac{\sin x}{1-x^2}$

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\sin x$ um $x_0 = \pi/2$, und geben Sie an, wo diese konvergiert.

Aufgabe 5 (5+5 = 10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^x - \cos x$.

a) Zeigen Sie: f ist bijektiv. HINWEIS: Denken Sie an Monotonie.
b) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f an der Stelle $\mathrm{e}^{\pi/2}$, d.h. berechnen Sie ${f^{-1}}'(\mathrm{e}^{\pi/2})$.

Aufgabe 6 (1+3+2+2+2+3 = 13 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x|x| + 4x + 1}{2x} .$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 7 (3+2+4+3 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie A^2.
b) Berechnen Sie $\det A$.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, die $AX = B$ erfüllen.

Aufgabe 8 (4+6 = 10 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_\alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_\beta := \begin{pmatrix} 3 \\ -\beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} .$$

a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind $\vec{u}_\alpha$ und $\vec{v}_\beta$ linear abhängig?
b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \vec{v}_0 + s\vec{u}_1 + t\vec{v}_1 ,\ s, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Welchen Abstand hat E zum Ursprung?

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Seien $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = \sin x$. Dann ist $V := \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3)$ ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$, des Raums der stetigen Funktionen auf $[-\pi, \pi]$. Es gilt $\dim V = 3$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Geben Sie für die folgenden beiden Unterräume von V jeweils die Dimension und eine Basis an:

$$U_1 := \{ f \in V \mid L(f) = 0 \} , \qquad U_2 := \{ g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g \} .$$