Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 13/14

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 02.04.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 111 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + 2 + 4n \;\forall\, n \geq 0$.

a) Bestimmen Sie a_1, a_2 und a_3.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_n = 2n^2 \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\log\frac{x}{\pi})}{\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+x^6} - \sqrt{2x^3+x^6}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{7x}-\mathrm{e}^{8x})^7}{x^5\sin^2(3x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\sin^2 x + (x-1)\cos^2 x}{7-3x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin^2 x + (x-1)\cos^2 x}{7-3x}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{3n} x^{2\nu}$, b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{n-\mu+1}$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k}$, d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu}$.

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

a) Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

(i) $\mathrm{e}^{\pi-x}$ (ii) $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ (stetig fortgesetzt bei Null) (iii) $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x^2 + \pi^2$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo diese konvergiert.

Aufgabe 5 (2+4 = 6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und stetig differenzierbar. Weiter gelte die nebenstehende Wertetabelle. Bestimmen Sie

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-3	-1	0	2
$f'(x)$	π	4	1	5

a) $f^{-1}(0)$ und
b) ${f^{-1}}'(-1)$.

Aufgabe 6 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \log \dfrac{3+x}{3-x}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
d) Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.
e) Skizzieren Sie die Funktion, sowie die Tangente aus Teil (d).
f) Geben Sie möglichst große $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$ an.

Aufgabe 7 (4+2+2+4 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & \pi \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ \pi & -\pi \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Berechnen Sie $\det B$.
c) Bestimmen Sie $\det(ABA)$.
d) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, die $BX = C$ erfüllen.

Aufgabe 8 (13 Punkte)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von

$$U := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^4$. Geben Sie auch $\dim U$ an.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sinh x$ und $f_3(x) = \cosh x$. Dann ist $V := \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3)$ ein Unterraum von $C([-1,1])$, des Raums der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$. Es gilt $\dim V = 3$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f' + f$. Geben Sie für die folgenden beiden Unterräume von V jeweils die Dimension und eine Basis an:

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\}, \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}.$$

Hinweis: $\sinh'(x) = \cosh x$ und $\cosh'(x) = \sinh x$.