Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Finde möglichst viele Lösungen der Gleichung $xy(x)^2 + y(x) - xy'(x) = 0$. Hinweis: Benutze einen integrierenden Faktor, um die Gleichung in eine exakte Differentialgleichung umzuformen.

Aufgabe 2: (×)

Finde die Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = -\frac{t^2}{x^3(t)}$, die der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ bzw. $x(0) = -1$ genügt. Auf welchem Intervall ist die Lösung definiert?

Aufgabe 3: (×, ∗, 4 Punkte)

Finde alle Lösungen der Gleichung $\dot{x}(t) + 2tx(t) = 4x(t) + e^{-t^2}$.

Aufgabe 4: (×)

Löse

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 0$$

mit den Anfangswertbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 1$ mittels einer Transformation auf ein System 1. Ordnung. Hinweis: Gehe dabei analog zu der Lösung der Gleichung $m\ddot{x} = -kx$ im Skript vor.

Aufgabe 5: (×)

a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $v(x) = x$. Bestimme den zugehörigen Fluß ϕ^t.

b) Gegeben sei der Fluß $\phi^t(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $\phi^t(x) = D(t)x$ mit

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Bestimme und skizziere das zugehörige Vektorfeld.

Aufgabe 6: (×)

Zeige, dass die Gleichung $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ mit vorgegebenem Anfangswert $x(0) = x_0 < 0$ keine eindeutige Lösung hat.