Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen. Wir wollen e^{tA} als Potenzreihe definieren.

a) Zeige, dass die Folge der Partialsummen $S_m = \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{A^\alpha}{\alpha!}$ bzgl. der Operatorm eine Cauchyfolge ist. Erinnerung: Die Operatornorm einer $n \times n$-Matrix A ist definiert als $\|A\|_{Op} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$. Dabei bezeichnet $\| \cdot \|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

b) Schliesse nun weiter, dass alle Einträge der Matrix S_n (aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}$) konvergieren und der Grenzwert e^{tA} somit wohldefiniert ist. Zeige $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t}$.

c) Zeige: Ist A diagonalisierbar, so gilt die Gleichung $e^{At} = S^{-1} e^{Dt} S$. Dabei ist S definiert durch $A = S^{-1} D S$.

Aufgabe 2: (×)

Das ebene physikalische Pendel wird durch die folgende Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Funktion der Zeit beschrieben: $\dot{\alpha}(t) = -\sin(\alpha(t))$. Skizziere das zugehörige Vektorfeld und einige Integralkurven im Phasenraum. Interpretiere die verschiedenen Typen von Integralkurven und besondere Punkte des Vektorfeldes.

Aufgabe 3: (×, ∗, 4 Punkte)

Wir untersuchen im Folgenden lipschitz-stetige Vektorfelder.

a) Sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass v lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Sei nun $v : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $v|_K : K \to \mathbb{R}^n$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ Lipschitz-stetig ist. Benutze dabei folgende (zu der in der Vorlesung gegebenen, äquivalente) Bedingung für Kompaktheit: Eine Menge $K \subset G$ ist genau dann kompakt wenn jede Überdeckung von K mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung hat. D.h. ist $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ (A nicht notwendigerweise abzählbar), U_α offen für alle $\alpha \in A$, so gibt es eine endliche Menge $A' = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ mit $K \subset \bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha$.

Aufgabe 4: (×)

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein beschränktes lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existieren Konstanten $L, M < \infty$, sodass $\|v(x)\| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und v genügt einer globalen Lipschitzbedingung mit der Konstanten L. Zeige, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung der DGL $\dot{x}(t) = v(x(t))$ mit $x(0) = x_0$ existiert, d.h. es gibt eine eindeutige, stetig differenzierbare Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die die Gleichung löst.

Aufgabe 5: (×)

Löse das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = tx(t)$, $x(0) = 1$ mit Hilfe der Iterationsvorschrift im Satz von Picard-Lindelöf, $x_n(t) = 1 + \int_0^t s x_{n-1}(s) \mathrm{d}s$. Überprüfe das Ergebnis, durch Lösung der DGL mit der Methode der Trennung der Variablen.