Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: (×)

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Vektorfeld, d.h. es existiert eine Konstante $M < \infty$, so dass $\|v(x)\| \leq M$. Sei $x(t)$ eine globale Lösung von

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t)) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0.$$

Zeige, dass

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + tM.$$

Aufgabe 2: (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Wir betrachten die Gleichung $\dot{x}(t) = v(x(t))$ mit zugehörigem Fluss $\varphi^t(x_0)$. Zeige, dass $\varphi^t(x_0)$ für festes aber beliebiges t stetig von x_0 abhängt. Hinweis: Benutze die Gleichung $x(t) = x_0 + \int_0^t v(x(s))\mathrm{d}s$.

Aufgabe 3: (×)

Diese Aufgabe zeigt, wie die Symmetrie einer Funktion gewisse Eigenschaften ihrer Fourierkoeffizienten bestimmt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, Riemann-integrable Funktion.

a) Zeige, dass die Fourier-Reihe der Funktion f geschrieben werden kann als

$$f(\theta) = \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)]\cos(n\theta) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)]\sin(n\theta).$$

b) Beweise, dass falls f gerade ist, so gilt $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ und wir bekommen eine Cosinus-Reihe.

c) Beweise, dass falls f ungerade ist, so gilt $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ und wir bekommen eine Sinus-Reihe.

d) Nehme an, dass $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\hat{f}(n) = 0$ für alle ungeraden n.

e) Zeige, dass f reellwertig ist genau dann wenn $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ für alle n.

Aufgabe 4: (×, ∗, 4 Punkte)

Betrachte die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & |\theta| > \delta, \\ 1 - |\theta|/\delta & |\theta| \leq \delta. \end{cases}$$

Zeige, dass

$$f(\theta) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2\pi\delta}\cos(n\theta).$$

Aufgabe 5: (×)

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\theta) = |\theta|$.

a) Zeichne den Graphen von f.

b) Zeige weiter:

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 0, \\ (-1 + (-1)^n)/\pi n^2 & n \neq 0. \end{cases}$$

Konvention:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{i \frac{2\pi}{L} n x} dx.$$

c) Bestimme die Fourier-Reihe von f in Termen von Sinus und Cosinus.

d) Es sei $\theta = 0$. Zeige, dass

$$\sum_{n \text{ odd } \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$